TP EDO

Yohan Penel

21 juin 2019

1 Rappel sur les méthodes numériques

Un grand nombre de problèmes issus de la physique, de la biologie, de l'économie ou de la médecine s'écrivent sous la forme d'une *équation différentielle ordinaire* (EDO) ou d'un *système d'EDO*. On s'intéresse ici non pas à l'étude du cadre mathématique de ces équations mais à leur résolution numérique effective.

Nous nous intéressons ici à des équations du type

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t)), \quad t > 0, \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \end{cases} \tag{P}$$

où les données sont la fonction $\boldsymbol{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ et le vecteur $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^p$, et l'inconnue est le champ de vecteurs $t \mapsto \boldsymbol{u}(t)$. On cherche à connaître l'évolution de la fonction $\boldsymbol{u}$ en fonction du temps t.

Dans la suite, on s'intéresse à la détermination de méthodes numériques qui permettent d'approcher la solution : pour cela, on procède à une subdivision de l'intervalle de temps $[0, T[$ en N sous-intervalles : on pose pour cela $h = \frac{T}{N}$ puis $t_n = nh$, soit

$$t_0 = 0 < t_1 = h < t_2 = 2h < \ldots < t_N = T.$$

Plutôt que de déterminer $t \mapsto \boldsymbol{u}(t)$, nous allons chercher à construire une suite $(\mathbf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui approche la solution aux temps t_n :

$$\mathbf{U}_n \simeq \boldsymbol{u}(t_n).$$

Ainsi, au lieu de résoudre explicitement un problème de nature *continue* (EDO), nous allons considérer des méthodes numériques basées sur la résolution d'un problème de nature *discrète* qui approche le problème initial (récurrence). Évidemment, nous allons voir qu'il existe de nombreuses possibilités de construire une telle solution numérique (discrète) $(\mathbf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui reproduit le comportement de la solution physique (continue) $t \mapsto \boldsymbol{u}(t)$.

Intégrons l'équation du problème (P) sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$. On obtient

$$\boldsymbol{u}(t_{n+1}) - \boldsymbol{u}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t$$

Comme indiqué précédemment, $\boldsymbol{u}(t_{n+1})$ sera approché par $\mathbf{U}_{n+1}$, $\boldsymbol{u}(t_n)$ sera approché par $\mathbf{U}_n$, mais il reste à approcher le terme intégral

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t$$

à l'aide de $\mathbf{U}_n$ et $\mathbf{U}_{n+1}$ (voire d'autres termes de la suite). Le choix de l'approximation de cette intégrale génère plusieurs méthodes.

1.1 Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler *explicite* consiste donc à évaluer le terme intégral en utilisant la méthode des *rectangles à gauche* :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t = h\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t_n)) + \mathcal{O}(h^2) \implies \boldsymbol{u}(t_{n+1}) - \boldsymbol{u}(t_n) = h\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t_n)) + \mathcal{O}(h^2).$$

Cela permet la construction d'une suite $(\mathbf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en négligeant le terme d'erreur :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h\,\boldsymbol{f}(\mathbf{U}_n),$$

en partant de $\mathbf{U}_0 = \boldsymbol{u}_0$ qui est connue.

La méthode d'Euler explicite peut être implantée de façon simple : c'est une méthode directe dont chaque étape ne nécessite que l'évaluation de la fonction f. Néanmoins, cette méthode peut être imprécise et ne pas préserver certaines propriétés fondamentales de la solution exacte (positivité des composantes de la solution, périodicité, ...) lorsque le pas de temps h est trop grand.

1.2 Méthode d'Euler implicite

Comme nous venons de le voir, la méthode d'Euler explicite est basée sur une évaluation du terme intégral par la méthode des rectangles à gauche. Mais on peut également évaluer le terme intégral par la méthode des *rectangles à droite*, ce qui définit la méthode d'*Euler implicite* :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h\,\boldsymbol{f}(\mathbf{U}_{n+1}).$$

Le schéma numérique est alors le suivant :

- $\mathbf{U}_0 = \boldsymbol{u}_0$ (initialisation : la valeur initiale $\boldsymbol{u}_0$ est connue)
- Pour tout $n > 0$, $\mathbf{U}_{n+1} - h\,\boldsymbol{f}(\mathbf{U}_{n+1}) = \mathbf{U}_n$.

La méthode d'Euler implicite est beaucoup plus délicate à mettre en œuvre que la méthode d'Euler explicite : en effet, on peut remarquer qu'à chaque itération en temps, la détermination de $\mathbf{U}_{n+1}$ nécessite la résolution d'un système *non linéaire*. S'il existe des méthodes de résolution efficaces pour ce type de problème (méthode de dichotomie, de la sécante, de la fausse position en 1D, méthode de Newton en 1D ou multi-D...), la mise en œuvre de la méthode d'Euler implicite est plus coûteuse (en termes de coûts de calculs) que la méthode d'Euler explicite). En revanche, elle possède quelques avantages d'un point de vue numérique : en particulier, il n'est pas nécessaire de choisir un pas de temps trop petit pour assurer la stabilité numérique de la solution approchée : même si h est grand, la solution numérique « n'explose » pas.

1.3 Méthode d'Euler modifiée

Les méthodes précédentes sont dites d'ordre 1 puisqu'elles admettent des erreurs de consistance de la forme :

$$\frac{\boldsymbol{u}(t_{n+1}) - \boldsymbol{u}(t_n)}{h} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t_k)) + \mathcal{O}(h), \qquad k \in \{n, n+1\}.$$

Il existe des méthodes avec un meilleur ordre d'approximation, comme par exemple celle qui repose sur la méthode des trapèzes pour approcher l'intégrale

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t = h\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t_n)) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t_{n+1}))}{2} + \mathcal{O}(h^3) \implies \mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n = h\frac{\boldsymbol{f}(\mathbf{U}_n) + \boldsymbol{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{2}.$$

C'est une méthode implicite d'ordre 2.

1.4 RK2

La méthode RK2 s'écrit :

$$\begin{aligned} k_1 &= \boldsymbol{f}(\mathbf{U}_n), \\ k_2 &= \boldsymbol{f}\left(\mathbf{U}_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ \mathbf{U}_{n+1} &= \mathbf{U}_n + hk_2. \end{aligned}$$

2 Applications

2.1 Une EDO simple

On considère tout d'abord l'EDO

$$\begin{cases} y'(t) = -3y(t), \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

1. Déterminer puis tracer la solution exacte de (1).
2. (a) Calculer la solution numérique obtenue par la méthode d'Euler explicite pour $N = 10$, $N = 100$, $N = 200$ puis $N = 500$.
   (b) Calculer l'erreur en norme L^2 pour chacune des discrétisations précédentes.
   (c) Tracer l'évolution de l'erreur en fonction de h.
3. Reprendre la quetion 2 avec la méthode d'Euler modifiée.

2.2 Une EDO plus complexe

On s'intéresse à l'EDO

$$\begin{cases} y'(t) = e^{-y(t)} \cos y(t), \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

1. Calculer la solution numérique de (2) obtenue par la méthode d'Euler explicite pour $N = 10$, $N = 100$, $N = 200$ puis $N = 500$.
2. Reprendre la question précédente avec la méthode d'Euler implicite couplée à une méthode de dichotomie.

2.3 Un système d'EDO

On considère le modèle de Lotka-Volterra (prédateur-proie)

$$\begin{cases} N'(t) = N(t)\left[1 - 2P(t)\right], \\ P'(t) = P(t)\left[-1 + 3N(t)\right], \\ N(0) = 0.2, \; P(0) = 0.2 \end{cases} \tag{3}$$

On pose $\mathcal{H}(n, p) = 3n - \ln n + 2p - \ln p$.

1. Déterminer puis tracer la solution numérique de (3) obtenue avec les méthodes d'Euler explicite et RK2 pour $N = 100$.
2. Pour chacune des méthodes, tracer la fonction $t \mapsto \mathcal{H}\big(N(t), P(t)\big)$. Que constatez-vous ?
3. Implémenter le schéma

$$\begin{cases} N_{n+1} = N_n + h(N_{n+1} - 2N_n P_{n+1}), \\ P_{n+1} = P_n + h(-P_{n+1} + 3N_n P_{n+1}). \end{cases}$$

   et reprendre la question précédente.