Examen

L'examen est prévu pour une durée de 1 heure 30. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits. Une attention particulière sera portée à la rigueur des réponses.

Rappels sur la transformée de Fourier

Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathcal{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\,\xi\,x}\, u(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \mathcal{F}^{-1}u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\,\xi\,x}\, u(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

De plus, on rappelle que, pour $v(\xi) = e^{-\kappa\xi^2}$, on a

$$\mathcal{F}^{-1}v(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa}} e^{-x^2/4\kappa}.$$

On s'intéresse dans ce sujet à l'étude d'une population dont l'effectif dépend du temps et de la position spatiale $x \in \mathbb{R}$. Dans toute la suite, $r > 0$, $K > 0$ et $D > 0$ sont des constantes données.

1 Un premier modèle

On suppose que la dynamique de la population étudiée, d'effectif $N(t,x)$, est modélisée par l'équation aux dérivées partielles (EDP)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN + D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, \tag{1}$$

munie de la condition initiale

$$N(0,x) = N_0(x), \tag{2}$$

pour une fonction N_0 **positive** donnée dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

1.1. Sous réserve que N est suffisamment régulière, on note $\hat{N}$ la transformée de Fourier en espace de N. De quelle équation $\hat{N}$ est-elle solution ?

1.2. En utilisant le rappel ci-dessus, en déduire une expression de la solution N en fonction de N_0.

1.3. En déduire le signe de la fonction N.

2 Un second modèle

On considère désormais l'EDP

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) + D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}. \tag{3}$$

2.1. Décrire qualitativement les phénomènes modélisés par les termes de l'équation (3).

2.2. A quel comportement de la solution peut-on s'attendre en temps long ?

2.3. Supposons que $N(0,x) = 0$. Donner une solution de l'EDP (3) associée à cette condition initiale.

2.4. Reprendre la question précédente lorsque $N(0,x) = K$.

2.5. Dans le cas général, on considère des solutions N de (3) définies sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient

$$\lim_{t\to-\infty} N(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} N(t,x) = K. \tag{4}$$

(a) On introduit la notation suivante :

$$n(\tau, X) = \frac{1}{K} N\left(\frac{\tau}{r}, \sqrt{\frac{D}{r}} X\right).$$

En déduire que si N est solution de (3), alors la fonction n est solution de l'EDP

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = n(1-n) + \frac{\partial^2 n}{\partial X^2}. \tag{5}$$

(b) Soit $c > 0$. On cherche à montrer qu'il existe une fonction $z \mapsto \mathcal{N}(z)$ telle que

$$n(\tau, X) = \mathcal{N}(X - c\tau) \tag{6}$$

soit solution de (5) et qui vérifie les conditions en temps (4).

i. Montrer que la fonction n définie par (6) est bien solution de (5) ssi $\mathcal{N}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\mathcal{N}'' = -\mathcal{N}(1-\mathcal{N}) - c\mathcal{N}'. \tag{7}$$

ii. Quelles sont les conditions aux limites que doit vérifier la fonction $\mathcal{N}$ pour que (4) soit vérifié ?

iii. On pose $U = \mathcal{N}$, $V = \mathcal{N}'$, $\mathbf{Y} = (U, V)$. Déterminer la fonction $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de sorte que l'EDO (7) se récrive sous la forme d'un système différentiel autonome du premier ordre

$$\mathbf{Y}'(z) = \mathbf{F}\big(\mathbf{Y}(z)\big). \tag{8}$$

iv. Déterminer les points d'équilibre de l'EDO (8) et étudier leur nature.

v. Expliquer pourquoi le résultat de la question précédente est compatible avec l'existence d'une solution (6) de l'EDP (5) qui vérifie (4).

(c) On se propose de construire des solutions approchées de l'équation (3) sur l'intervalle $[0, 1]$ que l'on discrétise en $x_1 = 0 < x_2 < \ldots < x_i = (i-1)\Delta x < \ldots < x_N = 1$, où le pas de maillage vaut $\Delta x = \frac{1}{N-1}$ pour $N \geqslant 2$. De même, on prend $\Delta t > 0$ et on pose, pour $n \geqslant 1$, $t^n = (n-1)\Delta t$. On impose les conditions aux limites $N(t, 0) = N(t, 1) = 0$. Le schéma proposé est le suivant, où $N_i^n \approx N(t^n, x_i)$:

$$\frac{N_i^{n+1} - N_i^n}{\Delta t} = r N_i^n \left(1 - \frac{N_i^{n+1}}{K}\right) + D\frac{N_{i+1}^{n+1} - 2N_i^{n+1} + N_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}.$$

i. Écrire le schéma global sous forme de système linéaire. Le schéma est-il explicite ou implicite ?

ii. Écrire l'algorithme permettant de déterminer la solution approchée en chaque noeud et à chaque pas de temps.

3 Démonstration d'une formule (bonus)

Redémontrer le rappel donné en introduction sur la transformée de Fourier. On pourra pour cela utiliser une EDO dont la fonction $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4\kappa}}$ est solution. On rappelle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \sqrt{\pi}$.