Examen (1^{re} session)

L'examen est prévu pour une durée de 1 heure 30. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre. Une attention particulière sera portée à la rigueur des réponses.

Remarques : Le sujet proposé était composé de 3 exercices : le premier correspond à l'exemple du polycopié de cours (astroïde), le deuxième à un calcul de dérivées partielles en dimension 2 et le troisième à un calcul intégral en dimension 3. Il reposait sur les notions de base et était plus simple que le partiel. La moyenne est de $20,51/50$, les notes allant de 0 à 48.

Exercice 1 *Dans le repère orthonormé* $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, *on considère le domaine* Ω *délimité par la courbe* $\mathscr{C}$ *paramétrée par*

$$\begin{cases} t \longmapsto \mathbf{M}(t) = \big(X_1(t), X_2(t)\big), \\ [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \end{cases} \qquad \textit{avec} \quad \begin{cases} X_1(t) = \cos^3 t, \\ X_2(t) = \sin^3 t, \end{cases}$$

et par le segment $[AB]$ *avec* $A(-1,0)$ *et* $B(1,0)$.

1.1. La courbe $\mathscr{C}$ présente-t-elle des symétries ?

Correction : Pour $t \in [0,\pi]$, on vérifie que $X_1(\pi - t) = -X_1(t)$ et $X_2(\pi - t) = X_2(t)$. On constate donc une symétrie d'axe (Ox_2). On peut alors restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi/2]$.

De même, pour $t \in [0,\pi/2]$, on a $X_1(\pi/2 - t) = X_2(t)$ et $X_2(\pi/2 - t) = X_1(t)$. C'est une symétrie d'axe $x_2 = x_1$. On restreint alors l'intervalle d'étude à $[0,\pi/4]$.

Remarques : La grande majorité des étudiants n'a pas vu dans l'énoncé qu'on s'intéressait à l'intervalle $[0,\pi]$. Ainsi, en écrivant l'égalité $X_1(-t) = X_1(t)$, on obtient une incohérence puisqu'on ne peut pas avoir en même temps $t \in [0,\pi]$ et $-t \in [0,\pi]$. De même, le lien entre une propriété analytique et lé réduction de l'intervalle d'étude n'est pas compris.

1.2. Déterminer les points singuliers de la courbe $\mathscr{C}$ et étudier leur nature. *On pourra utiliser les symétries pour n'étudier qu'un seul point singulier.*

Correction : Les fonctions X_1 et X_2 sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\mathbf{M}'(t) = \begin{pmatrix} -3\cos^2 t \sin t \\ 3\sin^2 t \cos t \end{pmatrix} = 3\cos t \sin t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sin(2t)\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

L'équation $\mathbf{M}'(t_0) = \mathbf{0}$ est équivalente à $\cos t_0 \sin t_0 = 0$, soit, dans $[0,\pi/4]$, il vient $t_0 = 0$. On déduit que le point $(1,0)$ est singulier, ainsi que, par symétrie, $(0,1)$ et $(-1,0)$. Étudions la nature de ce point singulier. Un développement limité au voisinage de $t = 0$ donne :

$$\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^4)\right)^3 \\ \left(t + \mathcal{O}(t^3)\right)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^4) \\ t^3 + \mathcal{O}(t^4) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(0) + t^2\begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(t^4).$$

Les entiers caractéristiques sont 2 (pair) et 3 (impair), c'est donc un point de rebroussement de première espèce.

Remarques : Dans les développements limités, les termes de reste ($\mathcal{O}(t^m)$) sont souvent oubliés.

1.3. Dresser, en justifiant, le tableau de variations **complet** de la courbe paramétrée $\mathscr{C}$.

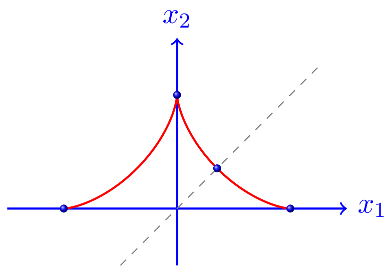
Correction : De l'expression de $\mathbf{M}'(t)$, on déduit que pour $t \in [0,\pi/4]$, $X_1'(t) \leqslant 0$ et $X_2'(t) \geqslant 0$. D'où le tableau :

t	0		$\pi/4$
$\overline{x}_1'(t)$	0	$-$	
$\overline{x}_1$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$\overline{x}_2$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$\overline{x}_2'(t)$	0	$+$	
$\frac{\overline{x}_2'(t)}{\overline{x}_1'(t)} = -\tan t$	0	$-$	

Remarques : La dernière ligne du tableau, qui donne le signe du coefficient directeur de la tangente, est régulièrement oublié.

1.4. Dessiner le domaine Ω.

Correction :



Remarques : Les étudiants ne font pas toujours le lien entre le tableau de variations de la question précédente et le tracé de la figure.

De très nombreux étudiants ont tracé un demi-cercle au lieu de l'astroïde. Si l'on s'en tient au tableau de variations, les deux figurs correspondent. Toutefois, l'existence de points de rebroussement discrimine le cas du cercle. Il est ainsi utile de place quelques points et leur tangente pour éviter les confusions (et les figures étranges).

1.5. Déterminer la longueur du contour du domaine Ω.

Correction : En utilisant la symétrie de la courbe par rapport à l'axe (Ox_2), la longueur de la courbe $\mathscr{C}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
|\mathscr{C}| &= \int_0^{\pi} \|\mathbf{M}'(t)\| \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \|\mathbf{M}'(t)\| \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{X_1'(t)^2 + X_2'(t)^2} \,\mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^{\pi/2} |\sin(2t)| \underbrace{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}}_{=1} \,\mathrm{d}t \overset{s=2t}{=} \frac{3}{2}\int_0^{\pi} |\sin s| \,\mathrm{d}s = \frac{3}{2}\left[-\cos s\right]_0^{\pi} = 3,
\end{aligned}$$

car $\sin \geqslant 0$ sur $[0,\pi]$. D'où la longueur du contour de Ω vaut $|\mathscr{C}| + AB = 5$.

Remarques : Comme d'habitude, de nombreux étudiants n'ont aucune scrupule à écrire $\sqrt{Z^2} = Z$ sans se préoccuper des valeurs absolues. C'est ainsi que beaucoup ont trouvé 0 comme longueur de l'arc $\mathscr{C}$ sans que cela ne les choque. De plus, il y a encore des abus de notations telles que

$$\int_{\mathscr{C}} \|\mathbf{M}'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

Or la variable d'intégration t n'appartient pas au domaine d'intégration proposé, c'est-à-dire $\mathscr{C}$! t est un réel qui vit dans un intervalle de $\mathbb{R}$, en l'occurence $[0, \pi]$.

À noter enfin que pour la longueur du segment $[AB]$, on peut donner sa valeur directement sans faire de calcul.

1.6. Calculer, en justifiant, la surface du domaine Ω.

Correction : Par application du théorème de Green-Riemann (Ω est ici un domaine fermé et sans trou, orienté dans le sens direct), on a :

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{U}\cdot \mathrm{d}\mathbf{M} = \int_{\mathscr{C}} \mathbf{U}\cdot \mathrm{d}\mathbf{M} + \int_{AB} \mathbf{U}\cdot \mathrm{d}\mathbf{M}$$

pour tout champ de vecteur $\mathbf{U}$ tel que $\nabla \wedge \mathbf{U} = 1$. Prenons $\mathbf{U} = (0, x_1)$. Alors, en paramétrant le segment $[AB]$ par $\hat{\mathbf{M}}(s) = (s, 0)$ pour $s \in [-1, 1]$ de sorte que le contour est paramétré dans le sens direct, on a :

$$\begin{aligned}|\Omega| &= \int_0^{\pi} X_1(t) X_2'(t) \,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} 0 \,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi} \cos^3 t \times 3 \cos t \sin^2 t \,\mathrm{d}t = 3 \int_0^{\pi} \cos^4 t (1 - \cos^2 t) \,\mathrm{d}t \\ &= 6(W_4 - W_6) = 6\frac{\pi}{32} = \frac{3\pi}{16},\end{aligned}$$

où on a utilisé la symétrie $\cos^{2n}(\pi - t) = \cos^{2n} t$.

Remarques : Ne pas oublier de citer le thoéorème qui est appliqué (Green-Riemann) et d'en vérifier les hypothèses !

On rappelle que, pour

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t,$$

on a : $W_2 = \frac{\pi}{4}$, $W_4 = \frac{3\pi}{16}$ *et* $W_6 = \frac{5\pi}{32}$.

Exercice 2 *On définit la fonction suivante sur le domaine* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ *:*

$$\Psi(x_1, x_2) = \ln\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right).$$

2.1. Déterminer le gradient de Ψ sur $\mathcal{D}$.

Correction : Par composition de fonctions usuelles, la fonction Ψ admet des dérivées partielles par rapport à x_1 et x_2 sur le domaine $\mathcal{D}$. On a :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Par symétrie,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Ainsi :

$$\nabla \Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Remarques : On rappelle que le gradient **est un vecteur** et non pas la somme des dérivées partielles premières !

De nombreuses erreurs de calcul ont été recensées, bien que ce soit des fonctions très usuelles.

En ce qui concerne les notations, étrangement, ds ∇f sont apparus alors que la fonction est notée Ψ...

2.2. Calculer le laplacien de Ψ sur $\mathcal{D}$.

Correction : Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$, on a :

$$\Delta\Psi(x_1,x_2) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = \frac{x_1^2+x_2^2-x_1\times 2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{x_1^2+x_2^2-x_2\times 2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = 0.$$

Exercice 3 *On introduit les coordonnées sphériques par*

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3.1. Déterminer la matrice jacobienne de Φ.

Correction : Par définition de la matrice jacobienne, on a :

$$\operatorname{Jac}\Phi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarques : La principale erreur relevée est d'écrire la transposée de la matrice.

3.2. *Soit $R > 0$. On considère le domaine*

$$\mathcal{S} = \{\Phi(r,\theta,\varphi) \,:\, 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}.$$

Déterminer, à l'aide d'une intégrale triple, le volume du domaine $\mathcal{S}$.

Correction : Le volume du domaine $\mathcal{S}$ est donné par :

$$|\mathcal{S}| = \iiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} |\det\operatorname{Jac}\Phi(r,\theta,\varphi)|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

d'après le théorème de changement de variables. Or, en utilisant le rappel ci-dessous, il vient :

$$\begin{aligned}\det\operatorname{Jac}\Phi(r,\theta,\varphi) &= r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi \\ &= r^2\sin^3\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) + r^2\cos^2\theta\sin\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) \\ &= r^2\sin\theta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) = r^2\sin\theta.\end{aligned}$$

D'où :

$$|\mathcal{S}| = \iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

car $\sin\theta \geqslant 0$ pour $\theta \in [0,\pi]$. En appliquant le théorème de Fubini, il vient :

$$|\mathcal{S}| = \left(\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right) = \frac{R^3}{3}\times 2\times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Remarques : En dépit de la formule rappelée ci-dessous, même les étudiants qui avaient la bonne jacobienne ne sont pas parvenus à en calculer le déterminant. Il fallait ensuite penser à citer les deux théorèmes (changement de variables et Fubini) et en pas oublier les valeurs absolues dans la formule de changement de variables.

Pour rappel, le calcul du déterminant d'une matrice 3×3 *peut s'effectuer comme suit :*

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$