Chapitre 5:
Lois de conservation : transport, diffusion

1 Préambule : lois de conservation

1.1 Principe général

On s'intéresse à la modélisation de phénomènes dits *conservatifs*, basés sur la conservation en temps d'une quantité :

quantité	**unité**
matière	nombre de molécules (ou mol.)
masse	kilogrammes
population	nombre d'individus
etc.	

Considérons un « volume » arbitraire V (le volume mentionné correspond en fait à une longueur en 1D, une surface en 2D et un volume en 3D). Dans le cas d'un volume de dimension d, celui-ci s'exprime en m^d. La description d'un système conservatif repose sur une simple équation :

- soit $\rho(t,x)$ la densité en espace associée à la quantité étudiée, exprimée en quantité par unité de volume ; afin de préciser le cadre d'étude, nous parlerons en 1D de densité linéique ; en 2D, de densité surfacique ; en 3D, de densité volumique. De façon générale, le terme de densité est utilisé indépendamment de la dimension du problème étudié.
- soit $m(t)$ la quantité (quantité de matière, masse totale ou population totale) contenue dans le volume arbitraire V à l'instant t. On a la relation :
$$m(t) := \int_V \rho(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Le principe de conservation exprime la propriété suivante : la variation en temps de la quantité $m(t)$ ne dépend que des apports localisés à la frontière du volume ; cela se traduit par un flux entrant ou sortant de matière (exprimé en quantité ou densité par unité de temps). On a alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t) = -\int_{\partial V} \mathbf{F}(t,x)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\gamma(x) \tag{1.1}$$

où $\mathbf{F}(t,x)$ désigne le flux instantané de densité qui passe à travers la frontière ∂V et $\mathbf{n}$ désigne la normale sortante à la frontière unitaire du volume V. L'équation traduit le fait que la variation de masse ne dépend que du flux sortant (algébrique) du volume V au niveau de sa frontière. Si le flux sortant est positif, la masse $m(t)$ tend à diminuer ; a contrario, si le flux sortant est négatif (*i.e.* le flux entrant est positif), la masse $m(t)$ tend à augmenter. Notons qu'en intégrant par parties (sous réserve de régularité de ρ), on a

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}(t,x) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\gamma(x) = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F}(t,x) \, \mathrm{d}x.$$

et on obtient d'après l'équation (1.1) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(t) = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{F}(t,x) \, \mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que la variation de masse vérifie également l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int_V \rho(t,x) \, \mathrm{d}x \right) = \int_V \partial_t \rho(t,x) \, \mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

D'après les équations (1.2) et (1.3), on a alors :

$$\int_V \left[\partial_t \rho(t,x) + \operatorname{div} \mathbf{F}(t,x) \right] \, \mathrm{d}x = 0.$$

L'équation intégrale ci-dessus étant valide pour tout volume V arbitraire, on en déduit :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{F} = 0. \tag{1.4}$$

1.2 Cas particuliers : advection, diffusion

Nous n'avons, pour l'instant, pas défini le flux $\mathbf{F}$ en fonction de la variable d'état ρ : ce choix dépend de la physique sous-jacente et constitue en soi une phase de modélisation ; d'une manière générale, le flux est défini par une loi de comportement qui fournit la relation entre le flux et la variable d'état : ici la densité. Ainsi d'une manière générale,

$$\mathbf{F} := \mathbf{f}(\rho, \partial_{x_i} \rho, ...)$$

Détaillons un peu deux grandes classes de lois de conservation scalaires *linéaires*, que nous étudierons plus en détail par la suite :

- **Advection.** Pour modéliser un phénomène de transport advectif, le flux de matière qui passe à travers une frontière à la vitesse $\mathbf{u}$ (exprimée en unité de « volume » par unité de temps) s'écrit

  $$\mathbf{F} := \mathbf{f}(\rho) = \mathbf{u}\rho.$$

  On obtient donc l'équation de transport linéaire $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\mathbf{u}\rho) = 0$ ou encore, lorsque le champ de vitesse est Ã divergence nulle

  $$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0.$$

  Dans le cas 1D, l'équation de transport linéaire s'écrit donc :

  $$\partial_t \rho + u \partial_x \rho = 0.$$

- **Diffusion.** Pour modéliser un phénomène de transport diffusif dont le principe est d'homogénéiser une distribution hétérogène de densité de matière, on postule que le flux qui passe à travers une frontière est proportionnel au gradient de densité de matière :

  $$\mathbf{F} := \mathbf{f}(\partial_{x_i} \rho) = -\mathrm{D} \nabla \rho.$$

  Ici, le signe « $-$ » indique que le flux effectif (*i.e.* compté positivement) est orienté des distributions les plus denses vers les distributions les moins denses. Par ailleurs, le coefficient D (exprimé en unité de volume au carré par unité de temps) quantifie la capacité de la matière à se disperser dans le milieu. On obtient donc l'équation de diffusion linéaire $\partial_t \rho + \operatorname{div}(-\mathrm{D}\nabla\rho) = 0$ ou encore

  $$\partial_t \rho - \mathrm{D} \Delta \rho = 0.$$

  Dans le cas 1D, l'équation de transport linéaire s'écrit donc :

  $$\partial_t \rho - \mathrm{D} \partial_{xx} \rho = 0.$$

2 Équation de diffusion

2.1 Résolution par la transformée de Fourier

Considérons le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \alpha \Delta u(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où α est un paramètre donné et où u_0 est une fonction donnée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$. En raison de la forme de l'équation, on cherche une solution u de classe $\mathscr{C}^1$ en temps et de classe $\mathscr{C}^2$ en espace. Une méthode de résolution de cette équation est basée sur la transformée de Fourier ; pour cela, nous supposerons que u et toutes ses dérivées admettent à tout instant des transformées de Fourier (on se donne par exemple $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$). On trouve alors que la fonction $\hat{u}$ vérifie l'EDO :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(t,\xi) + \alpha\|\xi\|^2\hat{u}(t,\xi) = 0,$$

associée à la donnée initiale $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. On a donc explicitement à tout temps

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-\alpha\|\xi\|^2 t}\hat{u}_0(\xi).$$

Pour déterminer une solution de l'équation, il suffit alors d'utiliser la formule d'inversion de Fourier. En posant $g_t(\xi) = e^{-\alpha\|\xi\|^2 t}$, on a alors

$$u(t,\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto \hat{u}(t,\xi)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(g_t \cdot \hat{u}_0\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(g_t\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{u}_0\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(g_t\right) * u_0$$

Il reste donc à évaluer la transformée de Fourier inverse de $\xi \mapsto g_t(\xi)$. C'est un calcul classique, laissé en exercice, et on a

$$\mathcal{F}^{-1}\left(g_t\right)(x) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\alpha t}}.$$

Exercice 2.1. *Montrer que la transformer de Fourier inverse de*

$$g_t(\xi) = e^{-\alpha\|\xi\|^2 t}$$

est la fonction définie par

$$\mathcal{F}^{-1}\left(g_t\right)(x) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\alpha t}}.$$

Correction de l'exercice 2.1. *Pour rappel, la transformée de Fourier de*

$$x \mapsto e^{-\|x\|^2}$$

est la fonction

$$\xi \mapsto \pi^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4}}.$$

Par définition de la transformée de Fourier inverse,

$$\mathcal{F}^{-1}\left(g_t\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{+ix\cdot\xi} g_t(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left(g_t\right)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{+ix\cdot\xi} e^{-\alpha\|\xi\|^2 t}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{+ix\cdot\xi} e^{-\frac{4\alpha\|\xi\|^2 t}{4}}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{+i\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\cdot\xi'} e^{-\frac{\|\xi'\|^2}{4}}\,\frac{\mathrm{d}\xi'}{(4\alpha t)^{\frac{d}{2}}}
\end{aligned}$$

en utilisant le changement de variables

$$\xi_i' = \sqrt{4\alpha t}\xi_i, \qquad \forall i \in \{1, ..., d\}.$$

En ré-écrivant l'identité (en multipliant et divisant par $\pi^{\frac{d}{2}}$), on obtient donc

$$\mathcal{F}^{-1}\left(g_t\right)(x) \quad = \quad \frac{1}{(4\alpha t)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{+i \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \cdot \xi'} \pi^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|\xi'\|^2}{4}} \,\mathrm{d}\xi'\right)}_{(*)}$$

On identifie alors le terme $(*)$ comme la transformée inverse de $\xi \mapsto \pi^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|\xi'\|^2}{4}}$ évaluée au point $\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$. Le terme $(*)$ s'identifie donc à

$$e^{-\frac{\|x\|^2}{4\alpha t}}$$

et on en déduit

$$\mathcal{F}^{-1}\left(g_t\right)(x) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\alpha t}}.$$

Par suite, on en déduit le résultat suivant

Proposition 2.1. *La fonction u définie sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ par*

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}} u_0(x - y) \,\mathrm{d}y$$

est une solution de l'équation de la chaleur.

Cette expression est parfaitement valide dès lors que u_0 admet une transformée de Fourier. La valeur $u(t, x)$ dépend de la valeur de u_0 en *tous les points de l'espace*; néanmoins, la plus grande contribution provient des "petites" valeurs de y, donnant ainsi un poids important aux seuls vosins de x. La fonction

$$\mathcal{E}(t, x) = (4\pi\alpha t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\alpha t}}$$

est appelée *noyau de la chaleur.*

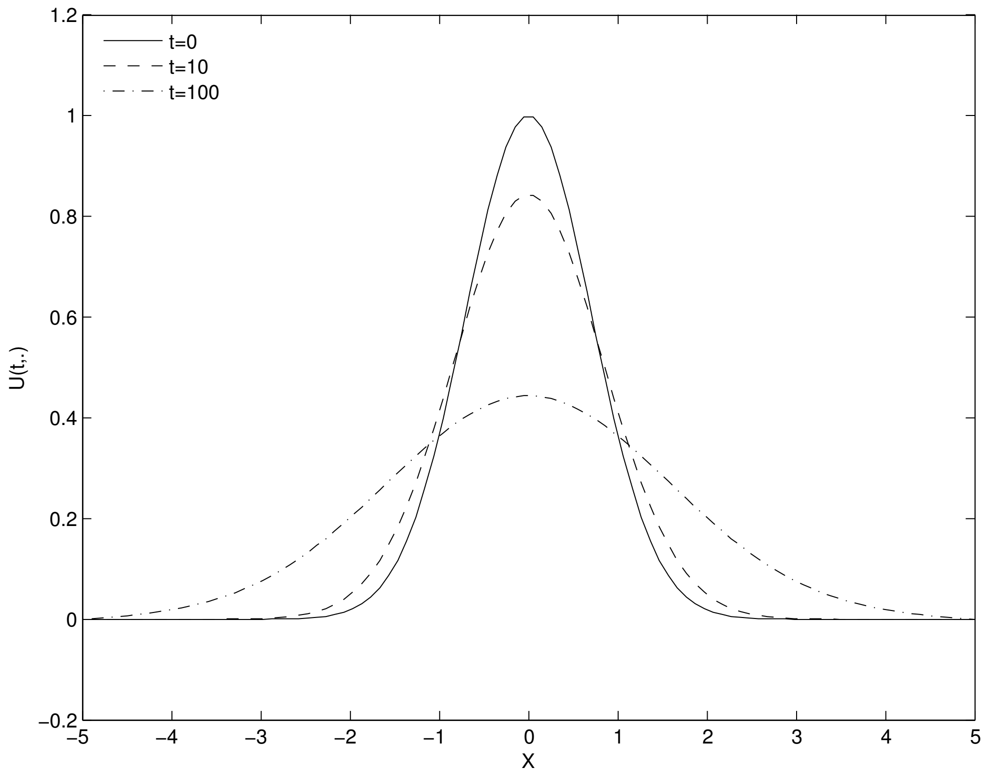
Remarques 2.1. *Si on suppose que u_0 est bornée (hypothèse naturelle si l'on suppose que u modélise des observables physiques tels que la température), on a*

$$\begin{aligned} u(t, x) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}} u_0(x - y) \,\mathrm{d}y \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2} u_0(x - 2\sqrt{\alpha t}\eta) \,\mathrm{d}\eta \\ &\xrightarrow[t \to 0]{} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2} u_0(x) \,\mathrm{d}\eta = u_0(x), \end{aligned}$$

lorsque t tend vers 0, grâce au théorème de Lebesgue. La fonction u vérifie donc la condition initiale.

2.2 Propriétés mathématiques

La formule de représentation intégrale des solutions de l'équation de la chaleur fournit des propriétés très particulières. En effet, u est en fait une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$, même pour des données de Cauchy qui ne sont pas régulières : c'est l'*effet régularisant* de l'opérateur de la chaleur, voir FIG. 1. Cet effet régularisant traduit également l'irréversibilité de l'équation de la chaleur : la solution à un instant $t > 0$ est infiniment plus régulière que la solution initiale. Cette propriété de régularisation peut être également observée par l'intermédiaire de la transformée de Fourier ; en effet, d'après l'identité $\hat{u}(t, \xi) = e^{-\alpha\|\xi\|^2 t}\hat{u}_0(\xi)$, on voit que l'exponentielle gaussienne améliore la déroissance à l'infini de la transformée de Fourier de la solution par rapport à la décroissance de $\hat{u}_0$. Il est également possible d'obtenir des estimations en temps pour les solutions de l'équation de la chaleur.



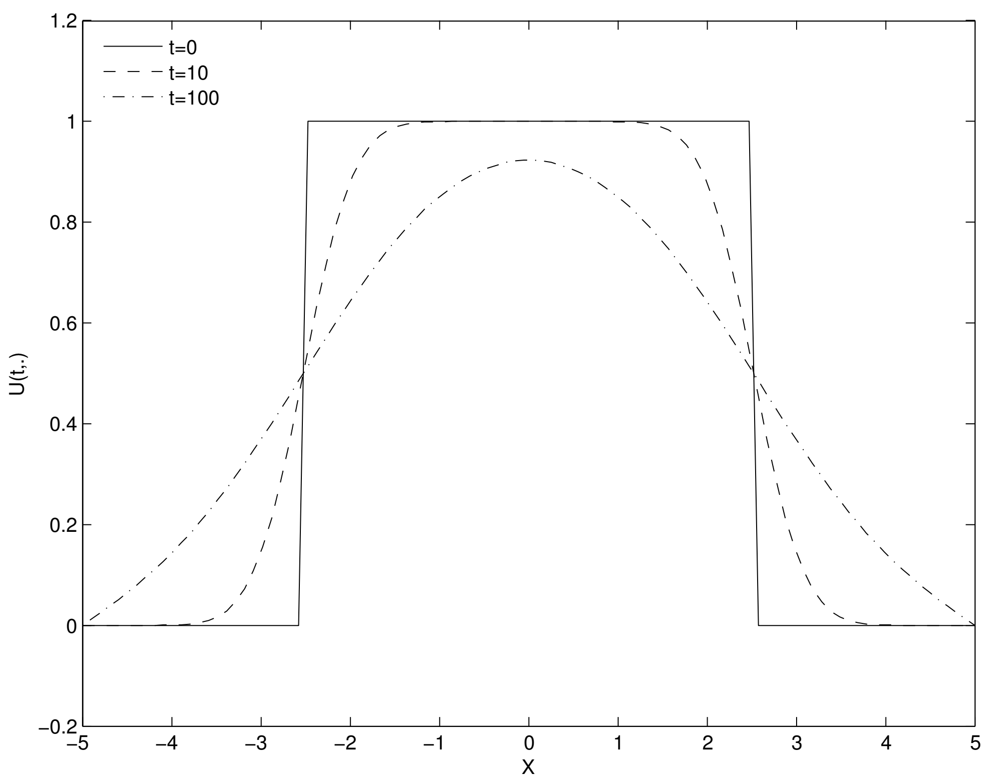


FIGURE 1 – Solution de l'équation de la chaleur pour différentes conditions initiales : $u_0(x) = e^{-x^2}$ et $u_0(x) = \mathbf{1}_{(-2.5,2.5)}(x)$.

Théorème 2.1 (Estimations).

i. Si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$*, alors on a pour tout* $t \geqslant 0$

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

ii. Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$*, il existe une constante* C *telle que l'on a, pour tout* $t > 0$*,*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}}.$$

iii. Si $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$*, il existe une constante* C *telle que l'on a, pour tout* $t > 0$*,*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. Si la donnée de Cauchy est bornée, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$,

$$|u(t,x)| \leqslant \frac{\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}}\,\mathrm{d}y = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

L'estimation repose alors sur le passage à la borne supérieure. Pour prouver l'item *ii.*, il suffit de remarquer que l'exponentielle est inférieure à 1 et on a alors

$$|u(t,x)| \leqslant \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}} |u_0(x-y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x-y)|\,\mathrm{d}y = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Le taux de décroissance est d'autant meilleur que la dimension d'espace est grande. La preuve de l'item *iii.* est une conséquence de l'identité de Parseval, en partant de l'inégalité

$$|\hat{u}(t,\xi)| = |e^{-\alpha\|\xi\|^2 t}\hat{u}_0(\xi)| \leqslant |\hat{u}_0(\xi)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Cette inégalité montre également une évolution irréversible dans le temps de la solution de l'équation de la chaleur, en considérant la quantité $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ comme une énergie : il s'agit en effet de la caractérisation de la décroissance de l'énergie au cours du temps. □

En utilisant l'estimation d'énergie, on montre alors que dans des espaces de fonctions « raisonnables », la solution de l'équation de la chaleur est unique :

Théorème 2.2 (Unicité)**.** *Supposons* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$*. Soit* u *une solution de l'équation de la chaleur telle que* $u(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *pour tout* $t \in (0,+\infty)$*. Alors* u *est unique.*

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux solutions de l'équations de la chaleur associées à la même donnée initiale u_0. Alors, par linéarité, $w := u_1 - u_2$ est solution de l'équation de la chaleur associée à la donnée initiale identiquement nulle $w_0 \equiv 0$. Par suite, pour tout $t \in (0,+\infty)$,

$$\|w(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|w_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

On en déduit $w \equiv 0$, soit $u_1 = u_2$. □

Terminons cette partie en considérant l'équation de la chaleur avec un terme source :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \alpha\Delta u(t,x) = g(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où g est une fonction que l'on choisit par exemple dans $\mathscr{C}^0(0,+\infty; L^2(\mathbb{R}^d))$. En utilisant comme précédemment la transformée de Fourier, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(t,\xi) = -\alpha\|\xi\|^2\hat{u}(t,\xi) + \hat{g}(t,x),$$

soit

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-\alpha\|\xi\|^2 t}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\alpha\|\xi\|^2(t-\tau)}\hat{g}(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau.$$

Par la formule d'inversion de Fourier, le premier terme correspond à la solution de l'équation de la chaleur homogène (sans terme source). Il reste à analyser le second terme, qui fait intervenir un produit de convolution : en posant $h_t(\xi) = e^{-\alpha\|\xi\|^2 t}$ pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathcal{F}^{-1}(h_{t-\tau}\hat{g}(\tau,\cdot)) = \mathcal{F}^{-1}(h_{t-\tau}) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}(\tau,\cdot)), \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant t$$

et, par suite, on obtient

Proposition 2.2. *La fonction u définie sur $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$ par*

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}}u_0(x-y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{(4\pi\alpha)^{\frac{d}{2}}}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4\alpha(t-\tau)}}g(\tau,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau$$

est une solution de l'équation de la chaleur avec terme source.

3 Équation de transport

Considérons le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + c\cdot\nabla u(t,x) = g(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur donné et où u_0 est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$. La fonction g est un terme source qui sera précisé ultérieurement. Le vecteur c modélise la vitesse de transport de la quantité u.

Parmi les méthodes de résolution de ce problème, la méthode des caractéristiques est sans doute la plus populaire. Néanmoins, une méthode de résolution de cette équation est basée sur la transformée de Fourier.

3.1 Résolution sans terme source

Supposons que $f \equiv 0$ et que u et toutes ses dérivées admettent à tout instant des transformées de Fourier (on se donne par exemple $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$). On trouve alors que la fonction $\hat{u}$ vérifie l'EDO :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(t,\xi) + ic\cdot\xi\,\hat{u}(t,\xi) = 0,$$

associée à la donnée initiale $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. On a donc explicitement à tout temps

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-i\,c\cdot\xi\,t}\hat{u}_0(\xi).$$

Pour déterminer une solution de l'équation, il suffit alors d'utiliser la formule d'inversion de Fourier :

$$\begin{aligned} u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{-i\,c\cdot\xi\,t}\hat{u}_0(\xi)\right)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{+ix\cdot\xi}e^{-i\,c\cdot\xi\,t}\hat{u}_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{+i(x-ct)\cdot\xi}\hat{u}_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Par cette dernière égalité, on identifie alors $u(t,x)$ comme la transformée inverse de $\hat{u}_0$ évaluée au point $x-ct$, *i.e.*

$$u(t,x) = u_0(x-ct).$$

Proposition 3.1. *La fonction u définie sur $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$ par*

$$u(t,x) = u_0(x-ct)$$

est une solution de l'équation de transport.

On retrouve, sans surprise, le résultat obtenu avec la méthode des caractéristiques.

Du point de vue mathématique, l'opérateur de transport ne donne lieu à aucun phénomène de régularisation, contrairement à l'opérateur de diffusion. En particulier, l'opérateur de transport ne fait pas apparaître d'analogue au noyau de la chaleur... Néanmoins, comme il s'agit d'une translation à vitesse uniforme, la norme L^p, $p \in [1, +\infty]$, est préservée au cours du temps.

3.2 Résolution avec terme source

En utilisant comme précédemment la transformée de Fourier, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(t,\xi) = -i\, c \cdot \xi\, \hat{u}(t,\xi) + \hat{g}(t,x),$$

soit

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-i\, c\cdot\xi\, t}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-i\, c\cdot\xi\,(t-\tau)}\hat{g}(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau.$$

Par la formule d'inversion de Fourier, le premier terme correspond à la solution de l'équation de transport homogène (sans terme source). Il reste à analyser le second terme et, plus précisément, de déterminer sa transformée de Fourier inverse. En posant

$$h_{t,\tau}(\xi) := e^{-i\, c\cdot\xi\,(t-\tau)}\hat{g}(\tau,\xi)$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left(h_{t,\tau}\right)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{+ix\cdot\xi} h_{t,\tau}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{+ix\cdot\xi} e^{-i\, c\cdot\xi\,(t-\tau)}\hat{g}(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{+i(x-c(t-\tau))\cdot\xi}\hat{g}(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Par cette dernière égalité, on identifie alors $\mathcal{F}^{-1}(h_{t,\tau})(x)$ comme la transformée inverse de $\hat{g}(\tau,\cdot)$ évaluée au point $x - c(t-\tau)$, *i.e.*

$$\mathcal{F}^{-1}\left(h_{t,\tau}\right)(x) = g(\tau, x - c(t-\tau)).$$

Par suite, on obtient :

Proposition 3.2. *La fonction u définie sur $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$ par*

$$u(t,x) = u_0(x-ct) + \int_0^t g(\tau, x-c(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

est une solution de l'équation de transport avec terme source.

4 Exercices

Exercice 4.1. *Calculer la solution du problème de la chaleur 1D homogène pour la donnée de Cauchy*

$$u_0 = e^{-x^2}.$$

Correction de l'exercice 4.1. *On dispose de deux méthodes :*

- Méthode 1. *Calcul de*

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-y^2}{4\alpha t} - (x-y)^2\right)\,\mathrm{d}y.$$

- Méthode 2. *On a déterminé précédemment l'identité* $\widehat{u}(t,\xi) = e^{-\alpha\xi^2 t}\widehat{u}_0(\xi)$. *La stratégie consiste alors à calculer* $\widehat{u}_0$ *puis à utiliser la transformée de Fourier inverse. Ainsi, on obtient :*

$$\widehat{u}(t,\xi) = e^{-\alpha\xi^2 t}\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2(\alpha t+1/4)}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\, e^{-\xi^2(\alpha t+1/4)}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\, e^{-(4\alpha t+1)\xi^2/4}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi\sqrt{4\alpha t+1}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\zeta/\sqrt{4\alpha t+1}}\, e^{-\zeta^2/4}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\alpha t+1}}e^{-x^2/(4\alpha t+1)}. \end{aligned}$$

Exercice 4.2. Soit $\alpha > 0$ et (u_0, v_0) un couple de fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse ici au système de la chaleur :

$$(\mathcal{R})\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u(t,x) - \alpha\partial_{xx}u(t,x) - \partial_{xx}v(t,x) &=& 0, & t>0,\quad x\in\mathbb{R}, \\ \partial_t v(t,x) - \partial_{xx}u(t,x) - \alpha\partial_{xx}v(t,x) &=& 0, & t>0,\quad x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) &=& u_0(x), & x\in\mathbb{R}, \\ v(0,x) &=& v_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

1. On suppose que les solutions u et v de $(\mathcal{R})$ admettent à tout instant $t \geqslant 0$ des transformées de Fourier (notées $\widehat{u}(t,\xi)$ et $\widehat{v}(t,\xi)$, avec $\xi\in\mathbb{R}$). Montrer que le vecteur $U(t,\xi) := (\widehat{u}(t,\xi), \widehat{v}(t,\xi))^T \in \mathbb{R}^2$ ($t \geqslant 0$, $\xi\in\mathbb{R}$) est solution d'un système différentiel que l'on précisera.
2. Par un changement de base, montrer qu'il est possible de calculer explicitement $\widehat{u}(t,\xi)$ et $\widehat{v}(t,\xi)$ pour $t \geqslant 0$ et $\xi\in\mathbb{R}$.
3. Pour quelles valeurs de α peut-on espérer effectuer une inversion de Fourier ?
4. Donner l'expression des solutions u et v du problème $(\mathcal{R})$.

Correction de l'exercice 4.2.

1. On suppose que les solutions u et v de $(\mathcal{R})$ admettent à tout instant $t \geqslant 0$ des transformées de Fourier (notées $\widehat{u}(t,\xi)$ et $\widehat{v}(t,\xi)$, avec $\xi\in\mathbb{R}$). On pose $U(t,\xi) := (\widehat{u}(t,\xi), \widehat{v}(t,\xi))^T \in \mathbb{R}^2$ ($t \geqslant 0$, $\xi\in\mathbb{R}$) et on a alors :

$$\begin{array}{l} \partial_t\widehat{u}(t,\xi) + \alpha\xi^2\widehat{u}(t,\xi) + \xi^2\widehat{v}(t,\xi) = 0, \quad t>0, \quad \xi\in\mathbb{R} \\ \partial_t\widehat{v}(t,\xi) + \xi^2\widehat{u}(t,\xi) + \alpha\xi^2\widehat{v}(t,\xi) = 0, \quad t>0, \quad \xi\in\mathbb{R} \end{array}$$

   ce qui montre que le vecteur U vérifie le système différentiel

$$\partial_t U = \xi^2\, A\, U, \qquad A = -\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

   associé à la donnée initiale $U(0,\xi) = (\widehat{u}_0(\xi), \widehat{v}_0(\xi))^T$.

2. Il est clair que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car symétrique réelle. On donne néanmoins ici une astuce, qui revient à diagonaliser élégamment la matrice. On voit ici simplement que $\forall t > 0$ et $\forall \xi\in\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{l} \partial_t(\widehat{u}+\widehat{v})(t,\xi) + (\alpha+1)\xi^2(\widehat{u}+\widehat{v})(t,\xi) = 0, \quad t>0, \quad \xi\in\mathbb{R} \\ \partial_t(\widehat{u}-\widehat{v})(t,\xi) + (\alpha-1)\xi^2(\widehat{u}-\widehat{v})(t,\xi) = 0, \quad t>0, \quad \xi\in\mathbb{R} \end{array}$$

   d'où l'on tire

$$\begin{array}{l} (\widehat{u}+\widehat{v})(t,\xi) = e^{-\xi^2(\alpha+1)t}(\widehat{u}_0+\widehat{v}_0)(\xi), \\ (\widehat{u}-\widehat{v})(t,\xi) = e^{-\xi^2(\alpha-1)t}(\widehat{u}_0-\widehat{v}_0)(\xi), \end{array}$$

   et $\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ se déduisent aisément par addition et soustraction des expressions ci-dessus ; on obtient alors :

$$\begin{aligned} \widehat{u}(t,\xi) &= \frac{1}{2}\left(e^{-\xi^2(\alpha+1)t}(\widehat{u}_0+\widehat{v}_0)(\xi) + e^{-\xi^2(\alpha-1)t}(\widehat{u}_0-\widehat{v}_0)(\xi)\right), \\ \widehat{v}(t,\xi) &= \frac{1}{2}\left(e^{-\xi^2(\alpha+1)t}(\widehat{u}_0+\widehat{v}_0)(\xi) - e^{-\xi^2(\alpha-1)t}(\widehat{u}_0-\widehat{v}_0)(\xi)\right). \end{aligned}$$

3. On voit que les transformées de Fourier font intervenir des termes en

$$e^{-\xi^2(\alpha\pm1)t}.$$

Pour pouvoir utiliser la formule d'inversion de Fourier, notamment

$$\mathcal{F}^{-1}(FG) = \mathcal{F}^{-1}(F) * \mathcal{F}^{-1}(G),$$

il faut naturellement que $\xi \mapsto e^{-\xi^2(\alpha\pm1)t}$ admettent des transformées de Fourier inverses, ce qui est le cas uniquement si $\alpha+1>0$ et $\alpha-1>0.$, donc si $\alpha>1$. Néanmoins, on voit que le cas $\alpha=1$ ne constitue pas un problème dans l'expression de $\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ puisque dans ce cas

$$\widehat{u}(t,\xi) = \frac{1}{2}\left(e^{-2\xi^2 t}(\widehat{u}_0+\widehat{v}_0)(\xi) + (\widehat{u}_0-\widehat{v}_0)(\xi)\right),$$
$$\widehat{v}(t,\xi) = \frac{1}{2}\left(e^{-2\xi^2 t}(\widehat{u}_0+\widehat{v}_0)(\xi) - (\widehat{u}_0-\widehat{v}_0)(\xi)\right).$$

admettent des transformées de Fourier inverses. La condition est donc

$$\alpha \geqslant 1.$$

4. L'inversion de Fourier donne en utilisant les formules de calcul bien connues l'expression des solutions pour $\alpha>1$

$$\begin{aligned} u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(& \frac{1}{\sqrt{4\pi(\alpha+1)t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4(\alpha+1)t)}\,(u_0(y)+v_0(y))\ \mathrm{d}y \\ & +\frac{1}{\sqrt{4\pi(\alpha-1)t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4(\alpha-1)t)}\,(u_0(y)-v_0(y))\ \mathrm{d}y \quad \Big), \\ v(t,x) = \frac{1}{2}\Big(& \frac{1}{\sqrt{4\pi(\alpha+1)t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4(\alpha+1)t)}\,(u_0(y)+v_0(y))\ \mathrm{d}y \\ & -\frac{1}{\sqrt{4\pi(\alpha-1)t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4(\alpha-1)t)}\,(u_0(y)-v_0(y))\ \mathrm{d}y \quad \Big), \end{aligned}$$

et pour $\alpha=1$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{8\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(8t)}\,(u_0(y)+v_0(y))\ \mathrm{d}y + (u_0(x)-v_0(x))\right),$$
$$v(t,x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{8\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(8t)}\,(u_0(y)+v_0(y))\ \mathrm{d}y - (u_0(x)-v_0(x))\right).$$

On voit dans ce dernier cas que $u(t,x)-v(t,x) = u_0(x)-v_0(x)$, pour tout $t\geqslant 0$, donc que $\partial_t(u-v)=0$, ce que l'on retrouve en retranchant les deux équations du système initial.

Exercice 4.3. *Soient $c\in\mathbb{R}^d$, $\alpha>0$, $\beta>0$. On considère le problème de transport-réaction-diffusion*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u(t,x) + c\cdot\nabla u(t,x) - \alpha\Delta u(t,x) & = & -\beta u(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x\in\mathbb{R}^d, \end{array}\right.$$

i. Déterminer la solution du problème.

ii. Montrer que si $u_0\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors on a pour tout $t\geqslant 0$

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} e^{-\beta t}.$$

iii. Montrer que si $u_0\in L^1(\mathbb{R}^d)$, il existe une constante C telle que l'on a, pour tout $t>0$,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}} e^{-\beta t}.$$

iv. Montrer que si $u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une constante C telle que l'on a, pour tout $t>0$,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} e^{-\beta t}.$$

Correction de l'exercice 4.3.

i. Par passage dans l'espace de Fourier, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t}(t,\xi) + (ic\xi + \alpha\xi^2 + \beta)\hat{u}(t,\xi) = 0.$$

Par intégration,

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)e^{-(\beta + ic\cdot\xi + \alpha\xi^2)t}.$$

Par suite, en utilisant la transformée de Fourier inverse,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}e^{-(\beta+ic\cdot\xi+\alpha\xi^2)t}\hat{u}_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-ct)\xi}e^{-\alpha\xi^2 t}\hat{u}_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)}_{(*)}e^{-\beta t} \end{aligned}$$

On identifie alors $(*)$ *à la transformée de Fourier inverse de* $g_t : \xi \mapsto e^{-\alpha\xi^2 t}\hat{u}_0$ *évaluée en* $x' = x - ct$. *Comme*

$$\mathcal{F}^{-1}(g_t) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}}u_0(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

on en déduit,

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}}u_0(x-ct-y)\,\mathrm{d}y\right)e^{-\beta t}.$$

ii. Si la donnée de Cauchy est bornée, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ *et* $t > 0$,

$$|u(t,x)| \leqslant \frac{\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}}\,\mathrm{d}y e^{-\beta t} = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}e^{-\beta t}.$$

L'estimation repose alors sur le passage à la borne supérieure.

iii. Pour prouver l'item iii., il suffit de remarquer que l'exponentielle est inférieure à 1 et on a alors

$$\begin{aligned} |u(t,x)| &\leqslant \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}}|u_0(x-ct-y)|\,\mathrm{d}y\right)e^{-\beta t} \\ &\leqslant \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x-ct-y)|\,\mathrm{d}y\right)e^{-\beta t} \\ &\leqslant \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}e^{-\beta t}. \end{aligned}$$

Le taux de décroissance est d'autant meilleur que la dimension d'espace est grande et le terme de réaction $\beta > 0$ *établit un amortissement exponentiel de la solution.*

iv. La preuve de l'item iv. est une conséquence de l'identité de Parseval, en partant de l'inégalité

$$|\hat{u}(t,\xi)| = |e^{-(\beta+\alpha\|\xi\|^2)t}\hat{u}_0(\xi)| \leqslant e^{-\beta t}|\hat{u}_0(\xi)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Cette inégalité montre également une évolution irréversible dans le temps de la solution de l'équation, en considérant la quantité $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ *comme une énergie : l'énergie décroit exponentiellement au cours du temps, avec un temps caractéristique de* β^{-1}.

Exercice 4.4. On s'intéresse à la résolution du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcll} i\partial_t u(t,x) + \partial_{xx}u(t,x) &=& 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(0,x) &=& u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

On suppose que $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ et on cherche une solution (à valeurs complexes) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ (t,x) & \mapsto & u(t,x) \end{array}$$

1. En considérant l'équation de Schrödinger et en lui appliquant la transformée de Fourier en x, calculer $\widehat{u} := \widehat{u}(t,\xi)$ en fonction de $\widehat{u}_0 := \widehat{u}_0(\xi)$. L'équation a-t-elle des effets régularisants sur la donnée initiale ? Montrer que

$$\forall t > 0, \quad \|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i(\xi^2 - x\xi)}\,\mathrm{d}\xi$ en fonction de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}$.
3. En déduire, par la transformée de Fourier inverse, l'expression de u en faisant intervenir un produit de convolution. Le noyau intervenant dans l'expression de u est-il intégrable ?
4. On suppose que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Montrer l'existence d'une constante $C \geqslant 0$ telle que

$$\forall t > 0, \quad \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Correction de l'exercice 4.4.

1. *En supposant que u et toutes ses dérivées admettent à tout instant des transformées de Fourier (on se donne par exemple $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$). On trouve alors que la fonction $\hat{u}$ vérifie l'EDO :*

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(t,\xi) + \xi^2\hat{u}(t,\xi) = 0, \qquad t > 0,$$

associée à la donnée initiale $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On a donc explicitement à tout temps

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-i\xi^2 t}\hat{u}_0(\xi), \qquad t \geqslant 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

De plus, la relation de Parseval entraîne la conservation de $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$, compte tenu du fait que $|\hat{u}(t,\xi)| = |\hat{u}_0(\xi)|$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, pour tout $t \geqslant 0$.

2. *On a*

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-i(\xi^2 - x\xi)\right)\,\mathrm{d}\xi = \exp\left(\frac{i}{4}x^2\right)\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-i\left(\xi - \frac{x}{2}\right)^2\right)\,\mathrm{d}\xi = \exp\left(\frac{i}{4}x^2\right)\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-i\eta^2\right)\,\mathrm{d}\eta$$

en utilisant le changement de variable $\eta := \xi - \dfrac{x}{2}$. L'intégrale vaut donc

$$\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\exp\left(\frac{i}{4}x^2\right)$$

3. *Le calcul précédent visait évidemment à calculer la solution de l'équation proposée sous forme d'un produit de convolution. En posant ici*

$$f_t(\xi) = \exp(-i\xi^2 t),$$

on a l'égalité

$$u = \mathcal{F}^{-1}(f_t) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_0) = \mathcal{F}^{-1}(f_t) * u_0,$$

avec

$$\mathcal{F}^{-1}(f_t)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp(-i(t\xi^2 - x\xi))\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp(-i(\eta^2 - \frac{x}{\sqrt{t}}\eta))\,\mathrm{d}\eta$$

en effectuant le changement de variable $\eta := \xi\sqrt{t}$. On en déduit, d'après le calcul effectué à la question précédente,

$$\mathcal{F}^{-1}(f_t)(x) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(\frac{ix^2}{4t}\right), \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}.$$

Par suite,

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \quad u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4it}\right) u_0(y)\,\mathrm{d}y,$$

en ayant convenu d'écrire $\sqrt{4\pi i t} := \sqrt{4\pi t}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Formellement, cette expression correspond à celui que l'on obtient pour l'équation de la chaleur avec un coefficient de diffusion α à la place du nombre imaginaire pur i. Toutefois, le terme $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{4t}}$ que l'on trouve dans l'équation de la chaleur est intégrable, alors que le terme $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{4it}}$, de module toujours égal à 1, ne l'est pas dans le cas de l'équation de Schrödinger.

4. *Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a*

$$|u(t,x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |u_0(y)|\,\mathrm{d}y,$$

d'où

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

avec $C := \dfrac{\|u_0\|_{L^\infty}}{2\sqrt{\pi}}$.

Pour l'exercice suivant, il est nécessaire de résoudre l'Exercice 4.1 ou, à défaut, d'en indiquer le résultat.

Exercice 4.5. On considère le problème (*non linéaire !!*) suivant dans lequel $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et u_0 est une donnée du problème que l'on précisera par la suite :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \alpha \partial_{xx} u(t,x) + \beta \left(\partial_x u(t,x)\right)^2, & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.1}$$

1. Soient u et v deux fonctions régulières (avec $v(t,x) > -1$, $\forall\,(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$) telles que

$$u = \frac{\alpha}{\beta} \log(v+1).$$

Calculer

$$\partial_t u, \quad \partial_x u, \quad \partial_{xx} u$$

en fonction des dérivées partielles de v. Que vaut v si $u = 0$?

2. Montrer que si u est solution de (4.1), alors v est solution d'un nouveau problème que l'on explicitera. On remplacera en particulier l'équation vérifiée par u en une équation vérifiée par v.

3. En déduire l'expression de la solution de (4.1) lorsque la fonction u_0 est définie par

$$u_0(x) = \frac{\alpha}{\beta} \log\left(e^{-x^2} + 1\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calculer $\|u(t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ en fonction de $t > 0$ et donner $\lim\limits_{t\to\infty} \|u(t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R}}$.

Correction de l'exercice 4.5.

1. Soient u et v deux fonctions régulières définies sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (avec $v(t,x) > -1$, $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$) telles que

$$u = \frac{\alpha}{\beta} \log(v+1). \tag{4.2}$$

Un simple calcul différentiel permet d'établir :

$$\partial_t u = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{(v+1)} \partial_t v, \qquad \partial_x u = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{(v+1)} \partial_x v, \qquad \partial_{xx} u = \frac{\alpha}{\beta} \left(-\frac{1}{(v+1)^2} \left(\partial_x v\right)^2 + \frac{1}{(v+1)} \partial_{xx} v \right).$$

Par ailleurs, comme la fonction log est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et s'annule uniquement en 1, on déduit immédiatement de la relation entre u et v :

$$u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0. \tag{4.3}$$

2. Soient u et v deux fonctions liées par la relation (4.2). En utilisant les calculs précédents, on montre alors :

$$\partial_t u(t,x) - \alpha \frac{\partial_{xx} u}{(} t,x) - \beta \left(\partial_x u(t,x)\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t v(t,x) - \alpha \partial_{xx} v(t,x) = 0.$$

De plus, en utilisant la monotonie de la fonction log, on a :

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \Leftrightarrow \quad v(0,x) = \exp\left(\frac{\beta}{\alpha} u_0(x)\right) - 1.$$

On déduit alors que le problème (P) est équivalent au problème

$$(\widetilde{\mathrm{P}}) \begin{cases} \partial_t v(t,x) = \alpha \partial_{xx} v(t,x), & t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}, \\ v(0,x) = v_0(x) := \exp\left(\dfrac{\beta}{\alpha} u_0(x)\right) - 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On s'est ainsi ramené à un problème de la chaleur linéaire.

3. D'après le cours, pour une solution initiale v_0 donnée, la solution du problème $(\widetilde{\mathrm{P}})$ s'écrit :

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{4\alpha t}} v_0(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Pour un choix particulier de donnée initale u_0, on a :

$$u_0(x) = \frac{\alpha}{\beta} \log\left(e^{-x^2} + 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad v_0(x) = e^{-x^2}.$$

Par suite, la solution du problème $(\widetilde{\mathrm{P}})$ s'écrit, voir Exercice 4.1 :

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t + 1}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t + 1}},$$

et la solution du problème (P) s'écrit :

$$u(t,x) = \frac{\alpha}{\beta} \log\left(1 + \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha t+1}}}{\sqrt{4\alpha t + 1}}\right).$$

Intéressons-nous désormais à $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}$; on établit aisément l'inégalité

$$1 + \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha t+1}}}{\sqrt{4\alpha t + 1}} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{4\alpha t + 1}},$$

en remarquant que la borne supérieure, dans l'inégalité ci-dessus est atteinte pour $x = 0$. Par suite, en utilisant la monotonie de la fonction log, on en déduit :

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} = \frac{\alpha}{\beta} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{4\alpha t + 1}}\right).$$

Le comportement asymptotique de $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ est donné par :

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} = 0.$$

Autrement dit, $u(t,\cdot)$ tend uniformément vers 0 en $t \to +\infty$: il s'agit qualitativement du comportement classique de la solution de l'équation de la chaleur et on remarque ici que la présence du terme non-linéaire n'influe pas sur ce comportement qualitatif.