

Chapitre 4: Transformée de Fourier, un outil de résolution pour les EDP linéaires

1 Séries de Fourier	1
1.1 Définition des coefficients de Fourier	1
1.2 Séries de Fourier : définition et résultats principaux	2
2 Construction historique des séries de Fourier	3
2.1 Équation de la chaleur 1D sur un domaine borné .	3
2.2 Propriétés de la solution de l'équation de la chaleur : principe du maximum, estimations, unicité .	4
2.3 Des séries de Fourier à la transformée de Fourier .	5
3 Transformée de Fourier	6
3.1 Définitions et propriétés	6
3.2 Extension de la théorie au cadre L^2	9
3.3 Produit de convolution	11
3.4 Transformation de Fourier en dimension $d > 1$	11

1 Séries de Fourier

Soit u une fonction 2ℓ -périodique, définie sur un intervalle $] - \ell, +\ell[$ (et donc sur \mathbb{R} par périodicité). On veut savoir dans quelle mesure il est possible d'écrire u sous la forme d'une somme infinie de termes en sin et cos (dite série trigonométrique) à l'instar de la décomposition sur une base orthonormée dans un espace euclidien.

On utilisera dans la suite le produit scalaire sur $L^2(-\ell, \ell)$

$$\langle f, g \rangle_{L^2(-\ell, \ell)} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \overline{g(x)} \, dx.$$

1.1 Définition des coefficients de Fourier

Définition 1.1 (Série trigonométrique). *Une fonction u définie sur $] - \ell, +\ell[$ est appelée série trigonométrique si elle s'écrit sous la forme*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right), \quad x \in] - \ell, +\ell[.$$

Définition 1.2 (Coefficients de Fourier). *Les coefficients de Fourier de u , fonction 2ℓ -périodique, sont définis par*

$$a_0 := \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} u(x) \, dx, \quad a_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} u(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \quad n \geq 1,$$

$$b_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} u(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \quad n \geq 1.$$

On peut aussi définir les coefficients de Fourier complexes par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n := \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} u(x) e^{-in\pi \frac{x}{\ell}} dx = \langle e_n, u \rangle_{L^2(-\ell, \ell)}$$

avec $e_n(x) = \exp\left(\frac{in\pi x}{\ell}\right)$.

Proposition 1.1 (Relations entre coefficients de Fourier complexes et réels).

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \left[\int_{-\ell}^{+\ell} u(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx - i \int_{-\ell}^{+\ell} u(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \right],$$

d'où $c_0 = a_0$ et, pour $n \geq 1$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad \text{ou, de manière équivalente,} \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Proposition 1.2 (Propriétés des coefficients).

- Si u est paire, alors :

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{+\ell} u(x) dx, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{+\ell} u(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

- Si u est impaire, alors :

$$\forall n \geq 0, a_n = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{+\ell} u(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

1.2 Séries de Fourier : définition et résultats principaux

Définition 1.3 (Fonction \mathcal{C}^K par morceaux). Soit $K \in \mathbb{N}$. Une fonction u définie sur $]a, b[$ est dite de classe \mathcal{C}^K par morceaux sur $]a, b[$ s'il existe un entier N et N points $a < x_1 < \dots < x_N < b$ tels que

- u est de classe \mathcal{C}^K sur tout intervalle $]x_j, x_{j+1}[$;
- $|u^{(k)}(x_j^\pm)| := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u^{(k)}(x_j \pm \varepsilon)| < +\infty, \forall j = 1, \dots, N, \forall k = 1, \dots, K$.

Définition 1.4 (Série de Fourier). La série de Fourier de u est la série trigonométrique définie par

$$S_{[u]}(x) := a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\pi \frac{x}{\ell}}$$

où les a_n, b_n et c_n sont les coefficients de Fourier (réels ou complexes) de u introduits dans la définition 1.2.

Question. Quel est le lien entre u et $S_{[u]}$?

Théorème 1.1 (Jordan-Dirichlet). Si u est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et 2ℓ -périodique, alors

$$S_{[u]}(x) = \frac{1}{2} (u(x^+) + u(x^-)).$$

Si u est de plus continue, alors la série de Fourier de u converge uniformément vers u sur \mathbb{R} .

Théorème 1.2 (Identité de Parseval). Si u est continue par morceaux et 2ℓ -périodique, on a alors

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} |u(x)|^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

Démonstration. Cette égalité se démontre facilement dans le cas régulier où l'on peut permuter sommes et intégrales.

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{+\ell} u(x) u(x) dx &= \int_{-\ell}^{+\ell} u(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_{-\ell}^{+\ell} u(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \int_{-\ell}^{+\ell} u(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right) = 2\ell a_0^2 + \ell \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

□

2 Construction historique des séries de Fourier

2.1 Équation de la chaleur 1D sur un domaine borné

Historiquement, on a utilisé les coefficients de Fourier pour résoudre l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \alpha \partial_{xx} u(t, x), & t > 0, x \in]0, \ell[, \\ u(t, 0) = u(t, \ell) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in]0, \ell[\end{cases}$$

avec la relation $u_0(0) = u_0(\ell) = 0$ qui assure la compatibilité de la condition initiale et des conditions aux limites. Pour résoudre cette EDP, on peut utiliser la méthode de séparation des variables, *i.e.* chercher la solution sous la forme

$$u(t, x) = \varphi(x) \psi(t), \quad \varphi \in \mathcal{C}^0(0, \ell), \quad \psi \in \mathcal{C}^1(0, +\infty).$$

On a alors : $\forall(t, x), \varphi(x)\psi'(t) = \alpha\varphi''(x)\psi(t)$. Si φ et ψ ne s'annulent en aucun point, on en déduit

$$\frac{\psi'(t)}{\alpha\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = C,$$

où C est une constante (qui ne dépend donc ni de x ni de t). La résolution s'effectue en trois étapes :

① **Équation en espace.** L'équation que l'on considère dans un premier temps est

$$\varphi''(x) - C\varphi(x) = 0$$

assortie des conditions aux limites $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$ (seul choix compatible avec les conditions aux limites $u(t, 0) = u(t, \ell) = 0$ pour tout $t > 0$).

- Si on choisit $C = \lambda^2$, on obtient

$$\varphi(x) = A e^{+\lambda x} + B e^{-\lambda x},$$

et les conditions aux limites imposent nécessairement $A = B = 0$.

- Si on choisit $C = -\lambda^2$, on obtient

$$\varphi(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

La condition $\varphi(0) = 0$ impose $A = 0$, alors que la condition $\varphi(\ell) = 0$ entraîne $B \sin(\lambda\ell) = 0$, ce qui autorise le choix

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}, \quad n \geq 1.$$

On a alors les solutions

$$\varphi_n(x) = B_n \sin(\lambda_n x).$$

② **Équation en temps.** L'équation que l'on considère dans un deuxième temps est alors

$$\psi'(t) = -\alpha \lambda_n^2 \psi(t),$$

ce qui fournit les solutions

$$\psi_n(t) = C_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t}.$$

③ **Retour sur la condition initiale.** On a obtenu, par les deux étapes précédentes, la classe de solutions

$$u_n(t, x) = B_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x).$$

Il reste à vérifier la condition initiale $u(0, \cdot) = u_0$. On remarque que si u_0 est de la forme

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^N \beta_n \sin(\lambda_n x),$$

un argument de superposition (dû à la linéarité de l'équation) permet de voir que la solution recherchée s'écrit

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^N \beta_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x).$$

Si à présent u_0 est quelconque, on peut chercher formellement une solution de la forme

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x).$$

Pour vérifier la donnée initiale, la famille $(B_n)_{n \geq 1}$ doit être telle que

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(\lambda_n x) = u_0(x), \quad \forall x \in]0, \ell[.$$

Il faut donc écrire u_0 , fonction nulle en 0 et ℓ , comme série de sinus. Si l'on introduit U_0 comme le prolongement impair 2ℓ -périodique de u_0 à \mathbb{R} , alors comme u_0 est de classe $\mathcal{C}_{pm}^1 \cap \mathcal{C}^0$ on a le développement en série de Fourier

$$U_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right), \quad B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(y) \sin(\lambda_n y) dy$$

Finalement, la solution du problème de la chaleur s'écrit :

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(y) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} y\right) dy \right) e^{-\alpha (n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right).$$

2.2 Propriétés de la solution de l'équation de la chaleur : principe du maximum, estimations, unicité

Une propriété essentielle de l'équation de la chaleur posée sur un segment (sur un espace borné, plus généralement) est le principe du maximum. Soit $T > 0$.

Proposition 2.1. *La solution de l'équation de la chaleur vérifie*

$$\max_{[0, T] \times [0, L]} u = \max_{\Lambda} u$$

où $\Lambda := \{0\} \times [0, \ell] \cup \{]0, T] \times \{0\}\} \cup \{]0, T] \times \{\ell\}\}$.

Ainsi, la valeur maximale de la solution n'est atteinte qu'en des points du bord, *i.e.* ne provient que de la condition initiale ou des conditions de bord. Physiquement, ce résultat traduit le fait qu'en absence de source de chaleur, la température ne peut spontanément se focaliser en un point intérieur du domaine. En considérant $-u$ au lieu de u , on vérifie de même le principe du minimum

$$\min_{[0, T] \times [0, \ell]} u = \min_{\Lambda} u.$$

Théorème 2.1 (Estimations).

i. Si $u_0 \in L^\infty(0, \ell)$, alors on a pour tout $t \geq 0$,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(0, \ell)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(0, \ell)}.$$

ii. Si $u_0 \in L^1(0, \ell)$, il existe une constante C telle que l'on a, pour tout $t > 0$,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(0, \ell)} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

iii. Si $u_0 \in L^2(0, \ell)$, il existe une constante C telle que l'on a, pour tout $t > 0$,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(0, \ell)} \leq \|u_0\|_{L^2(0, \ell)}.$$

Théorème 2.2 (Unicité). *La solution de l'équation de la chaleur est unique.*

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux solutions de l'équation de la chaleur associées à la même donnée initiale u_0 . Alors, par linéarité, $w := u_1 - u_2$ est solution de l'équation de la chaleur associée à la donnée initiale identiquement nulle $w_0 \equiv 0$. En vertu du principe du maximum, on a alors

$$\max_{[0, T] \times [0, \ell]} w = \max_{\Lambda} w = 0, \quad \min_{[0, T] \times [0, \ell]} w = \min_{\Lambda} w = 0.$$

On en déduit que w s'annule identiquement sur $[0, T] \times (0, \ell)$, soit $u_1 = u_2$. □

2.3 Des séries de Fourier à la transformée de Fourier

Pour conclure cette section, nous allons voir qu'il est possible d'étendre formellement cette notion au cas où la taille du domaine de périodicité tend vers $+\infty$. Pour cela, on se place dans la version complexe des coefficients de Fourier et on pose

$$F_\ell u(\xi) = \int_{-\ell}^{+\ell} u(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

L'identité $u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\pi \frac{x}{\ell}}$ avec $c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} u(x) e^{-in\pi \frac{x}{\ell}} dx$ se réécrit

$$u(x) = \frac{1}{2\ell} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_\ell u\left(\frac{n\pi}{\ell}\right) e^{in\pi \frac{x}{\ell}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_\ell u(\xi_n) e^{i\xi_n x} \Delta\xi_n,$$

avec $\xi_n = \frac{n\pi}{\ell}$ et $\Delta\xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n = \frac{\pi}{\ell}$. On reconnaît ici l'approximation d'une intégrale par une somme de type Riemann (mais infinie!). Si $\ell \rightarrow +\infty$, alors $\Delta\xi_n \rightarrow 0$ et le second membre va tendre formellement vers

$$\int_{\mathbb{R}} F u(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad \text{avec} \quad F u(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx.$$

On obtient alors formellement

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F u(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Ceci nous suggère évidemment l'étude de la transformation

$$u \mapsto F u(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx.$$

3 Transformée de Fourier

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1 (Transformée de Fourier). *Pour $u \in L^1(\mathbb{R})$, on pose*

$$\mathcal{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x) \, dx, \quad \check{\mathcal{F}}u(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} u(x) \, dx.$$

La fonction \hat{u} est appelée transformée de Fourier de u ; il est clair que si $u \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\hat{u}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x) \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \, dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Les théorèmes classiques de continuité d'intégrales généralisées dépendant d'un paramètre permettent aussi de démontrer que $\hat{u} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Hélas, on ne dispose pas de l'inclusion $\mathcal{F}L^1 \subset L^1$! Il est commode de travailler avec des espaces fonctionnels qui restent invariants sous l'action de l'opérateur défini par la transformée de Fourier. A cet effet, on travaillera souvent avec l'espace des fonctions infiniment régulières et à décroissance rapide.

Définition 3.2 (Espace fonctionnel $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). *On définit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, \exists C_{\alpha\beta} > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x^\alpha \partial^\beta u(x)| \leq C_{\alpha\beta} \right\}.$$

Exercice 3.1. *Les fonctions suivantes appartiennent-elles à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?*

$$x \mapsto e^{-x^2}, \quad x \mapsto e^{-|x|}, \quad x \mapsto (1+x^2)^{-1}, \quad x \mapsto \mathbf{1}_{]a,b[}(x).$$

Correction de l'exercice 3.1.

- $f : x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On peut montrer, par récurrence, que la fonction est de classe \mathcal{C}^∞ :

$$f^{(0)}(x) = e^{-x^2}, \quad f^{(1)}(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f^{(2)}(x) = -2(1-2x^2)e^{-x^2}, \quad \dots$$

et, par récurrence,

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$$

où P_n est un polynôme de degré n . Par ailleurs, la décroissance rapide est assurée par le comportement en $+\infty$ de $x \mapsto e^{-x^2}$. En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{N}$, le polynôme $Q_{\alpha,\beta} := x \mapsto x^\alpha P_\beta(x)$ est de degré $\alpha + \beta$. Par suite,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^\alpha f^{(\beta)}(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} Q_{\alpha,\beta}(x)e^{-x^2} = 0$$

de sorte que, par continuité, $x \mapsto x^\alpha f^{(\beta)}(x)$ est borné.

- $x \mapsto e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En effet, les propriétés de décroissance rapide à l'infini sont garanties mais la fonction n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .
- $x \mapsto (1+x^2)^{-1} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En effet, la fonction est de classe \mathcal{C}^∞ mais elle n'est pas à décroissance rapide : par exemple, en prenant $\alpha = 3, \beta = 0, x \mapsto x^3 f^{(0)}(x)$ n'est pas bornée.
- $x \mapsto \mathbf{1}_{]a,b[}(x) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car la fonction n'est pas continue (en a et b); notons qu'elle possède des propriétés de décroissance rapide en $\pm\infty$ car elle est à support compact...

Proposition 3.1 (Invariance de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par \mathcal{F}). *Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $u = \check{\mathcal{F}}\mathcal{F}u$. Dans ce cas, on utilisera la notation $\mathcal{F}^{-1} = \check{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. Ce résultat repose sur les théorèmes de continuité et de dérivabilité de fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre. □

Un des avantages de la transformée de Fourier est de transformer la dérivation en multiplication :

Proposition 3.2 (Transformation et dérivation (1)). *Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\partial^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi).$$

Démonstration. À l'aide d'une intégration par parties réitérée,

$$\widehat{\partial^\alpha u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \partial^\alpha u(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^\alpha e^{-ix\xi} u(x) dx = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi).$$

□

Proposition 3.3. *Si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(x) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi$.*

Démonstration. Le calcul suivant permet de démontrer le résultat :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(x) v(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(\xi) d\xi \right) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(\xi) v(x) dx d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} v(x) dx \right) u(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} u(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1. *Si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} u(x) v(x) dx$.*

Démonstration. On peut utiliser la proposition précédente. Pour cela, on établit quelques résultats :

- **Étape 1.** D'après la définition même, on a : $\mathcal{F}^{-1}u(x) = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}u(-x)$, ce qui implique $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}u(x) = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}\mathcal{F}u(-x)$, ou encore,

$$\mathcal{F}\mathcal{F}u(x) = 2\pi u(-x).$$

- **Étape 2.** On choisit $u(\xi) = \hat{U}(\xi)$ et $v(x) = V(-x)$. On a

$$\mathcal{I} := \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(x) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{\hat{U}}(x) V(-x) dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} U(-x) V(-x) dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} U(x) V(x) dx.$$

- **Étape 3.** En utilisant la proposition précédente, on a aussi :

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}} \hat{U}(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{U}(\xi) \overline{\hat{V}(\xi)} d\xi.$$

En utilisant les évaluations de \mathcal{I} aux étapes 2 et 3, le résultat est démontré.

□

Corollaire 3.2 (Identité de Parseval). *Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a alors*

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2\pi \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser le corollaire précédent avec $u = v$.

□

On voit ici, par l'intermédiaire de l'identité de Parseval, qu'il est tentant d'associer à la transformation de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. Hélas la transformée de Fourier telle qu'elle a été définie au début du paragraphe n'a pas de sens pour une fonction de $L^2(\mathbb{R})$... Cette difficulté sera surmontée plus loin.

Notons que dans le cas d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz ne donne pas d'indication sur le contrôle de \hat{u} , puisque l'on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx \right| \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |e^{-ix\xi}|^2 dx \right)^{1/2}}_{=+\infty} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}}_{=\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}}$$

Proposition 3.4 (Transformation et dérivation (2)). *Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Alors*

$$x \mapsto \widehat{x^\alpha u}(x) = (i\partial_\xi)^\alpha \hat{u}.$$

Démonstration. Le résultat s'obtient par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} x \mapsto \widehat{x^\alpha u}(x)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} x^\alpha u(x) dx = i^\alpha \int_{\mathbb{R}} (-i\xi)^\alpha e^{-ix\xi} u(x) dx \\ &= i^\alpha \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi^\alpha [e^{-ix\xi} u(x)] dx = (i\partial_\xi)^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx \right) = (i\partial_\xi)^\alpha \hat{u}(\xi). \end{aligned}$$

□

Exercice 3.2. *Déterminer la transformée de Fourier de*

$$x \mapsto \mathbf{1}_{]a,b[}(x), \quad x \mapsto e^{-|x|}, \quad x \mapsto e^{-|x|^2}, \quad x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)e^{-x}.$$

Correction de l'exercice 3.2. *Les techniques de détermination des transformées de Fourier peuvent être variées, comme le montrent les exemples suivants.*

1. Transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{]a,b[}$:

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]a,b[} e^{-ix\xi} dx = \int_a^b e^{-ix\xi} dx.$$

– Si $\xi = 0$, $\hat{u}(0) = \int_a^b dx = b - a$.

– Si $\xi \neq 0$, $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{-i\xi} [e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}] = \frac{i}{\xi} e^{-i(a+b)\xi/2} [e^{i(a-b)\xi/2} - e^{-i(a-b)\xi/2}]$. Soit :

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{2}{\xi} e^{-i(a+b)\xi/2} \sin\left(\frac{a-b}{2}\xi\right), \quad \xi \neq 0.$$

2. Transformée de Fourier de $e^{-|x|}$:

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^0 e^{x(1-i\xi)} dx + \int_0^{+\infty} e^{x(-1-i\xi)} dx = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

3. Transformée de Fourier de $e^{-|x|^2}$: *ici, on ne fait pas un calcul direct mais on cherche une équation vérifiée par la solution u :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) + 2xu(x) = 0.$$

On applique alors la transformée de Fourier à cette fonction, $x \mapsto u'(x) + 2xu(x)$, qui est identiquement nulle :

$$u'(x) + 2xu(x)(\xi) = 0$$

soit, d'après les Propositions 3.2 et 3.4,

$$i\xi \hat{u}(\xi) + 2i\partial_\xi \hat{u}(\xi) = 0, \quad \text{ou encore} \quad \partial_\xi \hat{u} + (\xi/2) \hat{u} = 0.$$

Il s'agit alors d'une autre équation différentielle que l'on résout directement. On a alors

$$\hat{u}(\xi) = C e^{-\xi^2/4}, \quad \text{avec} \quad C = \hat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

On trouve finalement :

$$\hat{u}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Remarques 3.1. Pour montrer que

$$C := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

on peut utiliser un argument qui repose sur l'identité de Parseval. Pour $u : x \mapsto e^{-x^2}$, on a établi que

$$\hat{u}(\xi) = Ce^{-\xi^2/4}.$$

Or d'après l'identité de Parseval,

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2\pi\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

soit

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)^2 dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)^2 d\xi.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u(x)^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x'^2} \frac{dx'}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x'^2} dx', \\ \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)^2 d\xi &= C^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = C^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi'^2} \sqrt{2} d\xi' = C^2 \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi'^2} d\xi'. \end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-x'^2} dx'}_{(*)} = C^2 \sqrt{2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi'^2} d\xi'}_{(**)}$$

et, par égalité de (*) et (**), on obtient

$$C = \sqrt{\pi}.$$

Remarques 3.2. Considérons les trois exemples précédents et analysons la régularité et la décroissance de ces fonctions :

– Ex. (i)	u décroît très vite à l'infini (support compact) u non continue	\hat{u} de classe \mathcal{C}^∞ \hat{u} décroît lentement à l'infini (en $1/\xi$)
– Ex. (ii)	u décroît très vite à l'infini (en exponentielle) $u \in \mathcal{C}^0 \setminus \mathcal{C}^1$	\hat{u} de classe \mathcal{C}^∞ \hat{u} décroît lentement à l'infini (en $1/\xi^2$)
– Ex. (iii)	u décroît très vite à l'infini (en exponentielle) $u \in \mathcal{C}^\infty$	\hat{u} de classe \mathcal{C}^∞ \hat{u} décroît vite à l'infini

On comprend donc que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ reste invariant par \mathcal{F} si on admet que \mathcal{F} échange "décroissance à l'infini" et "régularité", et inversement.

3.2 Extension de la théorie au cadre L^2

Nous exposons ici comment il est possible d'étendre la notion de transformée de Fourier au cas des fonctions de L^2 .

Théorème 3.1. Si $u \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a l'identité de Parseval

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ceci permet de définir la transformée de Fourier dans L^2 comme suit : si $u \in L^2(\mathbb{R})$ alors on considère une suite u_n d'éléments de $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ convergeant vers u dans $L^2(\mathbb{R})$. Comme cette suite est de Cauchy dans L^2 , on a

$$\|\hat{u}_p - \hat{u}_q\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \|u_p - u_q\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

et la suite \hat{u}_n converge donc par complétude de L^2 vers un élément que l'on note \hat{u} et que l'on désigne par transformée de Fourier de u . Mais il est incorrect d'écrire que si $u \in L^2$, alors \hat{u} est définie par

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx$$

puisque l'intégrale n'a pas de sens a priori lorsque $u \in L^2(\mathbb{R})$.

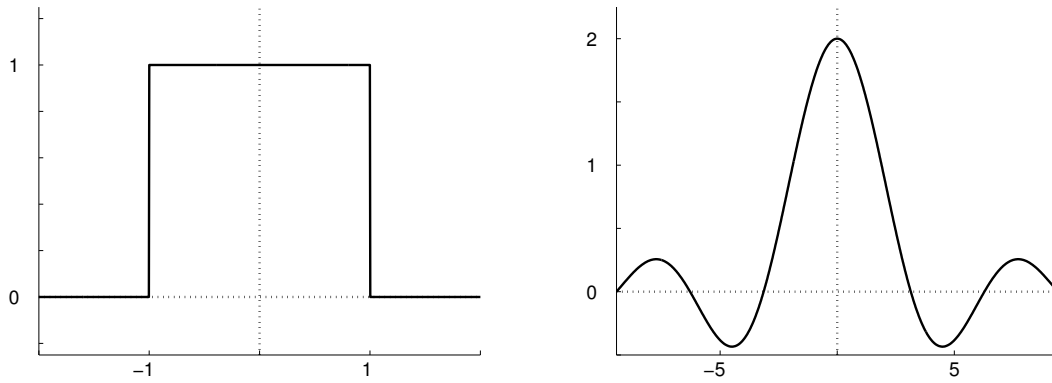


FIGURE 1 – Graphe des fonctions $x \mapsto \mathbf{1}_{a,b}(x)$ et $\xi \mapsto 2 \sin(\xi)/\xi$

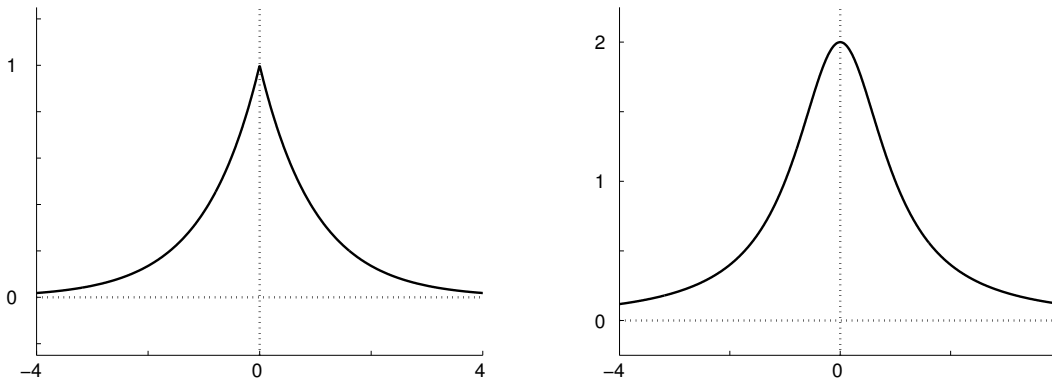


FIGURE 2 – Graphe des fonctions $x \mapsto e^{-|x|}$ et $\xi \mapsto \frac{2}{1+\xi^2}$

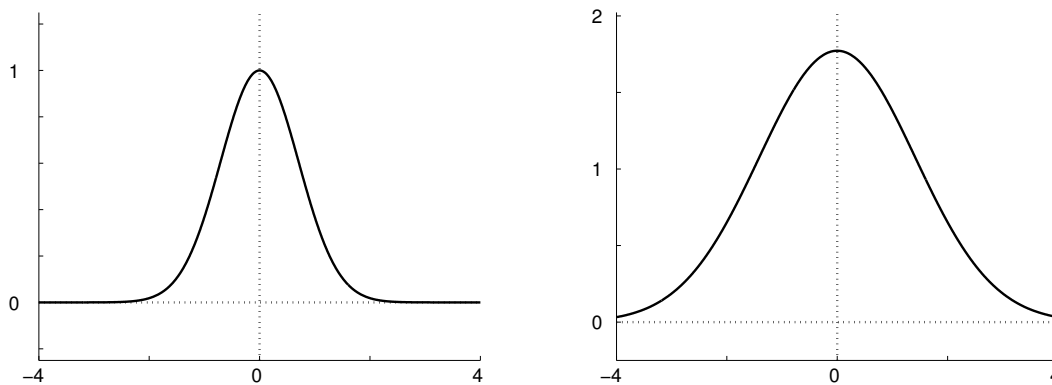


FIGURE 3 – Graphe des fonctions $x \mapsto e^{-|x|^2}$ et $\xi \mapsto \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}$

3.3 Produit de convolution

Nous terminons par une propriété essentielle de la transformée de Fourier vis-à-vis de la convolution. On rappelle pour cela que si u et v sont deux fonctions “raisonnables” (par exemple dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) alors on définit le produit de convolution $u * v$ par

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}} u(y) v(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3.5. Soient $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors

$$\widehat{u * v} = \hat{u} \hat{v}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \widehat{u * v}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u * v(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} u(y) v(x - y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(y) v(x - y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi} u(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x-y)\xi} v(x - y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi} u(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iz\xi} v(z) dz \right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi} u(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iz\xi} v(z) dz \right) \\ &= \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi). \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.3. Soient $U, V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathcal{F}^{-1}(UV) = \mathcal{F}^{-1}(U) * \mathcal{F}^{-1}(V).$$

Démonstration. On pose $u = \mathcal{F}^{-1}(U)$ et $v = \mathcal{F}^{-1}(V)$. La proposition précédente a montré que

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(U) * \mathcal{F}^{-1}(V)) = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(U) \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(V) = UV.$$

En passant à la transformation de Fourier inverse, on en déduit le résultat.

□

3.4 Transformation de Fourier en dimension $d > 1$

Il est possible d'étendre toutes les notions précédentes au cas où on se place dans \mathbb{R}^d , $d > 1$. Ainsi, la transformée de Fourier de $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est donnée par

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

On a évidemment $\mathcal{FS}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{+i\mathbf{x} \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Par analogie avec les résultats établis précédemment, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\widehat{\partial_j^\alpha u}(\xi) = (i\xi_j)^\alpha \hat{u}(\xi),$$

et

$$\mathbf{x} \mapsto \widehat{x_j^\alpha u}(\mathbf{x}) = (i\partial_{\xi_j})^\alpha \hat{u}(\xi).$$

La formule de Parseval s'écrit

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = (2\pi)^d \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

De même qu'en dimension 1, il est possible de définir la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 3.3. Montrer que la transformée de Fourier de

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mapsto e^{-\|\mathbf{x}\|^2}$$

est la fonction

$$\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \pi^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4}}.$$

Correction de l'exercice 3.3. On reprend la démarche adoptée dans le cas 1D. Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, la fonction u vérifie :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \partial_j u(\mathbf{x}) + 2x_j u(\mathbf{x}) = 0.$$

On applique alors la transformée de Fourier à cette fonction, $\mathbf{x} \mapsto \partial_j u(\mathbf{x}) + 2x_j u(\mathbf{x})$, qui est identiquement nulle :

$$\partial_j u(\mathbf{x}) + 2x_j u(\mathbf{x})(\xi) = 0$$

soit, d'après les propriétés de transformation de dérivation en produit ou de produit en dérivation,

$$i\xi_j \hat{u}(\xi) + 2i \partial_{\xi_j} \hat{u}(\xi) = 0,$$

ou encore

$$\partial_{\xi_j} \hat{u}(\xi) + (\xi_j/2) \hat{u}(\xi) = 0. \tag{3.1}$$

On cherche la fonction $\xi \mapsto \hat{u}(\xi)$ sous la forme d'une séparation de variables, i.e. sous la forme

$$\hat{u} : \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \mapsto \prod_{j=1}^d \hat{u}_{(j)}(\xi_j) = \hat{u}_{(1)}(\xi_1) \cdot \hat{u}_{(2)}(\xi_2) \cdot \dots \cdot \hat{u}_{(d)}(\xi_d).$$

Cette hypothèse de séparation combinée à l'équation (3.1) nous mène à résoudre les équations

$$\hat{u}'_{(j)}(\xi_j) + (\xi_j/2) \hat{u}_{(j)}(\xi_j) = 0, \quad j \in \{1, \dots, d\}.$$

En procédant comme dans le cas 1D, on obtient

$$\hat{u}_{(j)}(\xi_j) = C_j e^{-\xi_j^2/4}.$$

Par suite, on obtient, en posant $C = \prod_{j=1}^d C_j$,

$$\hat{u}(\xi) = C e^{-\sum_{j=1}^d \xi_j^2/4} = C e^{-\|\xi\|^2/4},$$

Il reste alors à déterminer la constante C . Pour cela, nous allons, comme dans le cas 1D, utiliser un argument qui repose sur l'identité de Parseval :

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = (2\pi)^d \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

soit

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)^2 d\xi.$$

On a alors, par changement de variables¹

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\|\mathbf{x}\|^2} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|\mathbf{x}'\|^2} \frac{d\mathbf{x}'}{2^{\frac{d}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|\mathbf{x}'\|^2} d\mathbf{x}', \\ \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)^2 d\xi &= C^2 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} d\xi = C^2 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|\xi'\|^2} 2^{\frac{d}{2}} d\xi' = C^2 2^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|\xi'\|^2} d\xi'. \end{aligned}$$

1. En particulier, le changement de variable $\mathbf{x}' = \sqrt{2}\mathbf{x}$ aboutit à

$$d\mathbf{x}' = dx'_1 \cdot dx'_2 \cdot \dots \cdot dx'_d = \sqrt{2} dx_1 \cdot \sqrt{2} dx_2 \cdot \dots \cdot \sqrt{2} dx_d = 2^{\frac{d}{2}} d\mathbf{x}.$$

tandis que le changement de variables $\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$ aboutit à

$$d\xi' = d\xi'_1 \cdot d\xi'_2 \cdot \dots \cdot d\xi'_d = \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\xi_2}{\sqrt{2}} \cdot \dots \cdot \frac{\xi_d}{\sqrt{2}} = \frac{d\xi}{2^{\frac{d}{2}}}.$$

Par suite, on obtient

$$\frac{(2\pi)^d}{2^{\frac{d}{2}}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|\mathbf{x}'\|^2} d\mathbf{x}'}_{(*)} = C^2 2^{\frac{d}{2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|\xi'\|^2} d\xi'}_{(**)}$$

et, par égalité de (*) et (**), on obtient

$$C = \pi^{\frac{d}{2}}.$$