Partiel

Le partiel est prévu pour une durée de 1 heure 30. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits. Les exercices sont indépendants. Une attention particulière sera portée à la rigueur des réponses.

En bleu, la correction de chaque question. En rouge, les erreurs les plus fréquemment commises.

Remarques : Globalement, il y a un manque de pratique sur le calcul concret (notamment les calculs de dérivées). D'autre part, on remarque que les résultats sont très rarement simplifiés (factorisés), ce qui empêche souvent de conclure. Enfin, de manière générale, les suites d'égalités mathématiques sont très peu justifiées, de même que les hypothèses des théorèmes sont rarement vérifiées. Attention enfin à ne pas additionner des scalaires avec des vecteurs : les objets ne vivent pas dans la même dimension.

Exercice 1 *Dans le repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par*

$$\begin{cases} t \longmapsto \mathbf{M}(t) = \big(X_1(t), X_2(t)\big), \\ [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \end{cases} \qquad \textit{avec} \quad \begin{cases} X_1(t) = (1 + 2\sin^2 t)\cos t, \\ X_2(t) = 2\sin^3 t. \end{cases}$$

1.1. Donner les coordonnées des points $\mathbf{M}(0)$, $\mathbf{M}(\frac{\pi}{2})$ et $\mathbf{M}(\pi)$.

Correction : Par calculs directs, $\mathbf{M}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{M}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.2. La courbe présente-t-elle des symétries ?

Correction : Pour tout $t \in [0,\pi]$, alors $\pi - t \in [0,\pi]$. On remarque que $X_1(\pi - t) = -X_1(t)$ et $X_2(\pi - t) = X_2(t)$. La courbe présente donc une symétrie d'axe (Ox_2), ce qui permet de réduire l'intervalle d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Remarques : Le domaine d'étude, précisé dans la définition du paramétrage, est $[0,\pi]$. Beaucoup d'étudiants ont directement étudié $\mathbf{M}(-t)$ alors que si $t \in [0,\pi]$, $-t \notin [0,\pi]$! D'autres ont jugé que comme $\mathbf{M}(0)$ est le symétrique de $\mathbf{M}(\pi)$ par rapport à l'axe (Ox_2), alors toute la courbe a la même symétrie… ce n'est pas suffisant pour conclure !

1.3. Montrer que $\mathbf{M}'(t) = 3\sin t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$.

Correction : X_1 et X_2 sont des fonctions dérivables, avec :

$$\begin{aligned} X_1'(t) &= 4\sin t \cos t \times \cos t - (1 + 2\sin^2 t)\sin t = \sin t\left[4\cos^2 t - 1 - 2\sin^2 t\right] \\ &= 3\sin t\left[1 - 2\sin^2 t\right] = 3\sin t\cos(2t) \\ X_2'(t) &= 6\sin^2 t\cos t = 3\sin t\sin(2t) \end{aligned}$$

Remarques : Pour information, la dérivée de $x \mapsto f(x)^2$ n'est pas $x \mapsto f'(x)^2$ mais $x \mapsto 2f(x)f'(x)$. Ainsi, la dérivée de $t \mapsto \sin^n t$ est $t \mapsto n\sin^{n-1} t\cos t$.

Outre des erreurs de calcul, beaucoup de copies présentent des lignes de calcul et miraculeusement le résultat escompté à la dernière ligne sans aucune logique. Il ne faut pas chercher à truander…

1.4. En déduire les points singuliers de la courbe et donner leur nature.

Correction : On a $X_1'(t_0) = 0$ et $X_2'(t_0) = 0$ pour $t_0 = 0$ (et par symétrie $t_0 = \pi$). Ainsi, $\mathbf{M}(0)$ est un point singulier. Pour déterminer sa nature, effectuons un développement limité au voisinage de $t = 0$:

$$X_1(t) = \left[1 + 2\left(t + \mathcal{O}(t^3)\right)^2\right] \times \left(1 - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^4)\right) = 1 + \frac{3}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^4)$$

$$X_2(t) = 2\left(t + \mathcal{O}(t^3)\right)^3 = 2t^3 + \mathcal{O}(t^5).$$

Ainsi, on a, au voisinage de 0

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(0) + t^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(t^4).$$

Les entiers caractéristiques sont 2 et 3. On en conclut que $\mathbf{M}(0)$ est un point de rebroussement de première espèce. Par symétrie, il en est de même pour $\mathbf{M}(\pi)$.

1.5. En quels points la courbe admet-elle une tangente horizontale ? verticale ?

Correction : On sait que pour des points réguliers, la tangente en $\mathbf{M}(t_0)$ est dirigée selon $\mathbf{M}'(t_0)$. La courbe admet donc une tangente horizontale lorsque $X_2'(t_0) = 0$. Compte-tenu de l'expression obtenue à la question 1.3, il faut $\sin t_0 = 0 \iff t_0 \in \{0, \pi\}$ ou $\sin(2t_0) = 0 \iff t_0 \in \{0, \pi/2, \pi\}$. On a vu dans la question précédente qu'au point singulier $\mathbf{M}(0)$, la tangente est dirigée selon le vecteur $(\frac{5}{2}, 0)$. La tangente est donc horizontale en $\mathbf{M}(0)$, $\mathbf{M}(\frac{\pi}{2})$ et $\mathbf{M}(\pi)$.

La tangente est verticale quand $X_1'(t_0) = 0$, soit $\cos(2t_0) = 0 \iff t_0 \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$.

Remarques : Étonnamment, cette question a montré de grandes confusions. Les conditions d'une tangente horizontale sont rarement identifiées (est-ce $X_1'(t_0)$ ou $X_2'(t_0)$ qui doit être nul ?) et surtout, l'autre coordonnée du vecteur tangent $\mathbf{M}'(t_0)$ doit être non nulle ! Beaucoup ont conclu qu'en $t = 0$, il y avait à la fois une tangente horizontale et une tangente verticale…

1.6. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $\mathbf{M}(\frac{\pi}{3})$.

Correction : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en $\mathbf{M}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est donné par

$$\frac{X_2'(\frac{\pi}{3})}{X_1'(\frac{\pi}{3})} = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

La droite d'équation $x_2 = -\sqrt{3}x_1 + b$ doit ainsi passer par le point $(\frac{5}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$, ce qui donne $b = 2\sqrt{3}$.

Remarques : Une erreur courante consiste à utiliser les mêmes notations pour la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ et pour la courbe paramétrée qui est la droite tangente à $\mathscr{C}$. Là aussi, de très nombreuses erreurs de calcul pour $\mathbf{M}(\pi/3)$ et $\mathbf{M}'(\pi/3)$.

1.7. Dresser le tableau de variations complet du paramétrage.

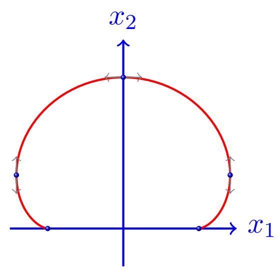
Correction :

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$\overline{x}_1'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$\overline{x}_1$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$\overline{x}_2$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	2
$\overline{x}_2'(t)$	0	$+$		$+$	0
$\frac{\overline{x}_2'(t)}{\overline{x}_1'(t)}$	0	$+$	$\|$	$-$	0

Remarques : Il manque souvent la dernière ligne, à savoir le coefficient directeur de la tangente en chaque point. Il est utile de préciser la valeur des fonctions en des points particuliers (bornes, extrema).

1.8. Tracer la courbe.

Correction :



Remarques : Outre le fait que seules deux ou trois copies ont proposé la bonne courbe, le fait marquant est que la courbe proposée à la question 1.8 ne s'appuie pas sur le tableau de variations de la question 1.7. En particulier, on voit des courbes s'aventurer sous l'axe des abscisses alors que le tableau de variations montre que X_2 est toujours positive...

1.9. Calculer la longueur de la courbe.

Correction : La longueur de la courbe est donnée par :

$$|\mathscr{C}| = \int_0^\pi \|\mathbf{M}'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sqrt{X_1'(t)^2 + X_2'(t)^2} \,\mathrm{d}t = 3\int_0^\pi |\sin t| \,\mathrm{d}t = 3[-\cos t]_0^\pi = 6,$$

car $\sin t \geqslant 0$ pour $t \in [0, \pi]$.

Remarques : La formule permettant de calculer la longueur de la courbe est généralement connue. En revanche, seule une copie a utilisé les valeurs absolues pour simplifier $\sqrt{\sin^2 t} = |\sin t|$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.1. Justifier que la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

Correction : En dehors de l'origine, la fonction f est continue car c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule qu'en $(0,0)$. Au voisinage de l'origine, montrons que selon le chemin suivi, la limite n'est pas la même. D'une part, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = f(0,0).$$

D'un autre côté, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

Ceci prouve que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

Remarques : La question a été souvent correctement traitée mais dans certaines copies, l'argument utilisé est que la fonction n'est pas définie en $(0,0)$, alors que le sujet précise bien la valeur en $(0,0)$.

2.2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?

Correction : On vérifie que, pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Cette limite étant finie, ceci prouve que la fonction admet une dérivée partielle première en $(0,0)$ par rapport à x_1. La démonstration est la même pour justifier l'existence de la dérivée partielle première par rapport à x_2.

Remarques : Très souvent, il a été argué que la fonction n'étant pas continue en $(0,0)$, alors elle ne peut pas admettre de dérivées partielles en $(0,0)$. Le raisonnement est juste en dimension 1 mais pas en dimension 2. La preuve en est que cette fonction-là convient.

2.3. Déterminer, pour $(x_1,x_2) \neq (0,0)$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)$.

Correction : Pour $(x_1,x_2) \neq (0,0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = x_2\frac{x_1^2+x_2^2-2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = x_2\frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}.$$

2.4. En déduire, sans calculs supplémentaires, le gradient de la fonction f.

Correction : Par symétrie entre x_1 et x_2 dans la définition de f, on déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = x_1\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}.$$

On en déduit l'expression du gradient de f :

$$\nabla f(x_1,x_2) = \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Remarques : Sans calculs supplémentaires ne veut pas dire sans explications... par ailleurs, on rappelle que le gradient est un champ de vecteurs, pas un scalaire.

2.5. Déterminer les lignes de niveau 0 et $\frac{1}{2}$ de la fonction f.

Correction : La ligne de niveau 0 de la fonction f est l'ensemble des points (x_1,x_2) qui vérifient $f(x_1,x_2)=0$, c'est-à-dire $x_1x_2=0$. Elle se compose donc de l'axe des abscisses (Ox_1) et de l'axe des ordonnées (Ox_2).

La ligne de niveau $\frac{1}{2}$ est donnée par

$$\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} = \frac{1}{2} \iff 0 = x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 = (x_1-x_2)^2.$$

C'est donc la droite d'équation $x_2=x_1$.

Exercice 3 Énoncer le théorème de Poincaré vu en cours.

Correction : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine sans trou. On considère un champ de vecteurs $\mathbf{U}$ admettant des dérivées premières continues dans Ω. Alors $\mathbf{U}$ est un champ de gradient si et seulement si $\nabla\wedge\mathbf{U}=0$.

Remarques : La question a été très peu traitée. Lorsqu'elle l'était, il manquait soit les hypothèses sur $\mathbf{U}$, soit les hypothèses sur Ω, soit l'équivalence dans l'énonce du résultat.