TP2 : systèmes d'EDP prédateurs-proies

Le but de ce TP est de simuler le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \partial_t u + c_u \partial_x u - \alpha_u \partial_{xx} u + \beta_u u = -\dfrac{uv}{\tau}, & \text{sur } (0,T)\times(0,1), \\ \partial_t v + c_v \partial_x v - \alpha_v \partial_{xx} v + \beta_v v = \dfrac{uv}{\tau}, & \text{sur } (0,T)\times(0,1) \\ u(0,\cdot) = u_0, & \text{sur } (0,1), \\ v(0,\cdot) = v_0, & \text{sur } (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t > 0, \\ v(t,0) = v(t,1) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{P}$$

Ce modèle permet de représenter la prédation d'une espèce par une autre espèce, localisée sur un territoire représenté par le segment $(0,1)$: les proies sont représentées par leur fonction de densité u, tandis que les prédateurs sont représentées par leur fonction de densité v.

- chaque espèce évolue selon un processus de mort ou naissance *intra-spécifique* :
  - pour u, le terme $\beta_u < 0$ (resp. > 0) modélise un phénomène de naissance (resp. mort) ;
  - pour v, le terme $\beta_v < 0$ (resp. > 0) modélise un phénomène de naissance (resp. mort).
- chaque espèce peut évoluer par transport ($c_u, c_v \in \mathbb{R}$) et diffusion ($\alpha_u, \alpha_v \geq 0$).
- l'interaction entre les deux espèces est modélisée par les termes $\pm\tau^{-1}uv$, dans lesquels τ représente un temps caractéristique d'interaction. Le terme de mort $-\tau^{-1}uv$ pour les proies est d'autant plus élevé que la rencontre proies-prédateurs est élevée ; de même, le terme de naissance $+\tau^{-1}uv$ pour les prédateurs est d'autant plus élevé que la rencontre proies-prédateurs est élevée.

La mise en œuvre de schémas numériques permettant de capturer efficacement les mécanismes décrits ci-dessus constitue une étape préalable à l'étude du modèle complet. Dans la partie A, nous étudierons des schémas numériques pour le transport et la diffusion ; dans la partie B, nous exploiterons cette étude préliminaire pour l'adapter au modèle proies-prédateurs.

A Méthode des différences finies

On s'intéresse à une équation de type réaction-diffusion-transport (en négligeant donc l'interaction entre deux espèces) :

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u - \alpha \partial_{xx} u + \beta u = 0, & \text{sur } (0,T)\times(0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & \text{sur } (0,T), \\ u(0,\cdot) = u_0, & \text{sur } (0,1). \end{cases} \tag{Q}$$

L'inconnue est le vecteur $(t,x) \mapsto u(t,x)$. On connait la valeur de $x \mapsto u_0(x)$ à l'instant initial $t=0$ et on cherche à connaître l'évolution de la solution en fonction de la variable d'espace x et du temps t. En pratique, on s'intéresse à la détermination de méthodes numériques qui permettent d'approcher la solution : pour cela, on procède à une subdivision de l'intervalle de temps $[0,T]$ en $M>0$ petits pas de temps de durée Δt : on pose en effet $t_n = (n-1)\Delta t$ et on a alors

$$t_1 = 0 < t_2 = \Delta t < t_3 = 2\Delta t < \ldots < t_M = (M-1)\Delta t = T.$$

On procède aussi à une subdivision du domaine en espace $[0,1]$ en $N>0$ petits pas d'espace de longueur Δx : on pose $x_i = (i-1)\Delta x$ et on a alors

$$x_1 = 0 < x_2 = \Delta x < x_3 = 2\Delta x < \ldots < x_N = (N-1)\Delta x = 1.$$

Plutôt que de déterminer $(t,x) \mapsto u(t,x)$, nous allons chercher à construire une suite $(u_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}$ qui définit une approximation discrète de la solution :

$$u_i^n \simeq u(t_n, x_i),$$

et on notera

$$U^n := \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$$

les inconnues du problème discret associé.

A.1 Schémas pour le transport

Pour le transport, on considère $c=1$, $\alpha=\beta=0$. On utilisera comme condition initiale

$$u_0(x) = \mathbf{1}_{]0.1,0.4[}(x).$$

A.1.1. **Schéma explicite pour le transport.** Dans le cas où $c>0$, on considère le schéma décentré amont. On se donne $(u_i^1)_i$ définie par $u_i^1 = u_0(x_i)$ et, par récurrence, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad i \in [\![2, N]\!], \\ u_1^{n+1} = 0, \end{cases} \tag{$\mathrm{T_{expl.}}$}$$

Montrer que le schéma s'écrit simplement sous la forme

$$U^{n+1} = U^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(U^n - g(U^n)\right)$$

où $g(U^n)$ est un vecteur que l'on précisera. Implémenter le schéma sous `scilab` et calculer la solution numérique avec un temps $T = 0.25$ et des paramètres de discrétisation :

- $\Delta x = 5 \cdot 10^{-2}$, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$.
- $\Delta x = 1 \cdot 10^{-1}$, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$.
- $\Delta x = 5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$.
- $\Delta x = 5 \cdot 10^{-1}$, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$.

Qu'observez-vous ?

A.1.2. **Schéma implicite pour le transport.** Le schéma décentré amont peut être implicite :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\dfrac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0, \quad i \in [\![2, N]\!], \\ u_1^{n+1} = 0. \end{cases} \tag{$\mathrm{T_{impl.}}$}$$

Montrer que la solution numérique vérifie la relation

$$\left(\mathrm{Id} + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\overline{\overline{\mathrm{T}}}\right) U^{n+1} = U^n,$$

où $\overline{\overline{\mathrm{T}}}$ est une matrice que l'on déterminera. Implémenter le schéma sous `scilab` et déterminer la solution numérique avec les mêmes paramètres que précédemment. Qu'observez-vous ?

Commandes utiles :

- `ones` (pour définir un vecteur dont chaque composante vaut 1),
- `eye` (pour définir une matrice Identité),
- `diag` (pour définir une matrice diagonale ou tridiagonale à partir des éléments diagonaux, sur-diagonaux, sous-diagonaux),
- `\` (pour résoudre un système linéaire).

A.2 Schémas pour la diffusion

Pour la diffusion, on considère $\alpha = 0.01$, $c = \beta = 0$. On utilisera comme condition initiale

$$u_0(x) = \mathbf{1}_{]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[}(x)$$

A.2.1. **Schéma explicite pour la diffusion.**

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta t^2} = 0, \quad i \in [\![2, N-1]\!], \\ u_1^{n+1} = u_N^{n+1} = 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{D}_{\mathrm{expl.}})$$

Montrer que le schéma s'écrit simplement sous la forme

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\left(d(U^n) - 2U^n + g(U^n)\right)$$

où $g(U^n)$ et $d(U^n)$ sont des vecteurs que l'on précisera. Implémenter le schéma sous `scilab` et calculer la solution numérique avec un temps $T = 0.25$ et des paramètres de discrétisation :

- $\Delta x = 1 \cdot 10^{-2}$, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$.
- $\Delta x = 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$.

Qu'observez-vous ?

A.2.2. **Schéma implicite pour la diffusion.**

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha \dfrac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0, \quad i \in [\![2, N-1]\!], \\ u_1^{n+1} = u_N^{n+1} = 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{D}_{\mathrm{impl.}})$$

Montrer que la solution numérique vérifie la relation

$$\left(\mathrm{Id} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\overline{\overline{\mathrm{D}}}\right) U^{n+1} = U^n,$$

où $\overline{\overline{\mathrm{D}}}$ est une matrice que l'on déterminera. Implémenter le schéma sous `scilab` et déterminer la solution numérique avec les mêmes paramètres que précédemment. Qu'observez-vous ?

A.3 Schéma de transport-diffusion-réaction

A.3.1. **Schéma de transport-diffusion-réaction.** Pour le système (Q), on considère le schéma implicite :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\dfrac{u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}-\alpha\dfrac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\beta u_i^{n+1}=0, \quad i\in [\![2,N-1]\!], \\ u_1^{n+1}=u_N^{n+1}=0. \end{cases} \tag{$\mathrm{Q}_{\Delta t,\Delta x}$}$$

Montrer que la solution numérique vérifie la relation

$$\left(\mathrm{Id}+\frac{c\Delta t}{\Delta x}\bar{\bar{\mathrm{T}}}-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\bar{\mathrm{D}}}+\Delta t\beta\bar{\bar{\mathrm{R}}}\right)U^{n+1}=U^n,$$

où $\bar{\bar{\mathrm{R}}}$ est une matrice que l'on déterminera. Implémenter le schéma sous `scilab` et déterminer la solution numérique pour un jeu de données de votre choix. Discuter les résultats obtenus.

A.3.2. **Pour aller plus loin...**

(a) Comment adapter le schéma décentré dans le cas $c<0$?

(b) Dans le cas du transport, implémenter d'autres schémas numériques en version explicite ou implicite : schéma centré, schéma de Lax-Friedrichs, le schéma de Lax-Wendroff,...

(c) Adapter le schéma de transport et le schéma de diffusion à d'autres conditions aux limites :

$$u(t,0)=0, \qquad \partial_x u(t,1)=0, \tag{CL'}$$
$$\partial_x u(t,0)=0, \qquad \partial_x u(t,1)=0. \tag{CL''}$$

B Application au système proies-prédateurs

Pour étudier le système proies-prédateurs (P), les schémas numériques étudiés précédemment peuvent être mis en œuvre. Il faut bien sûr s'intéresser à la seule difficulté qui subsiste : le couplage entre les deux espèces, modélisé par le terme d'interaction $\pm\tau^{-1}uv$, qui rend le système non linéaire.

B.1 Schéma numérique

Pour des questions de stabilité numérique, nous privilégions les schémas implicites et proposons la mise en œuvre du schéma suivant, basé sur une implicitation partielle du couplage :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c_u\dfrac{u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}-\alpha_u\dfrac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\beta_u u_i^{n+1}=-\dfrac{u_i^{n+1}v_i^n}{\tau}, \quad i\in [\![2,N-1]\!], \\ \dfrac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\Delta t}+c_v\dfrac{v_i^{n+1}-v_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}-\alpha_v\dfrac{v_{i+1}^{n+1}-2v_i^{n+1}+v_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\beta_v v_i^{n+1}=\dfrac{u_i^n v_i^{n+1}}{\tau}, \quad i\in [\![2,N-1]\!], \\ u_1^n=u_N^n=0, \\ v_1^n=v_N^n=0. \end{cases} \tag{$\mathrm{P}_{\Delta t,\Delta x}$}$$

B.1.1. **Systèmes matriciels.** Montrer que le schéma consiste, à chaque pas de temps, à résoudre successivement deux problèmes linéaires du type

$$A_u(V^n)U^{n+1}=U^n, \qquad A_v(U^n)V^{n+1}=V^n, \tag{B.1}$$

dont on précisera les matrices.

B.1.2. **Implémentation et validation.** Implémenter le schéma sous `scilab` et déterminer la solution numérique pour le jeu de données suivant :

- condition initiale :
$$u_0(x) = \mathbf{1}_{]0.1,0.5[}(x), \qquad v_0(x) = \mathbf{1}_{]0.5,0.9[}(x),$$
- temps final :
$$T = 1.5,$$
- paramètres intra-spécifiques du modèle :
$$c_u = 0.00, \qquad \alpha_u = 0.05, \qquad \beta_u = 1.00,$$
$$c_v = 0.20, \qquad \alpha_v = 0.01, \qquad \beta_v = 0.00,$$
- paramètre d'interaction :
$$\tau = 0.20,$$
- paramètres numériques :
$$\Delta x = 0.01, \qquad \Delta t = 0.01 \ .$$

B.1.3. **Discussion.** Discuter l'influence de certains paramètres du modèle sur la dynamique du système.

B.2 Invasion barbare

On souhaite modéliser un système proies-prédateurs qui vérifie les observations suivantes :

R1. à l'instant initial, il n'existe qu'une population de proies localisée au milieu du domaine ; les prédateurs sont absents.

R2. en l'absence de prédateurs, les proies connaissent une croissance malthusienne (modérée) et le déplacement de la population s'effectue par un processus de diffusion uniquement ;

R3. les prédateurs se déplaçent par un processus de transport et, éventuellement, de diffusion ; par ailleurs, la décroissance de la population des prédateurs n'est que peu affectée (cette hypothèse pourra être remise en cause) par l'absence de proies ;

R4. les proies sont confinées sur leur territoire et ne peuvent sortir du domaine.

R5. les prédateurs envahissent le territoire en $x = 0$ et ressortent librement du territoire en $x = 1$.

B.2.1. **Hypothèses sur le modèle.** À partir de ces règles d'interaction (que nous pourrons remettre en cause par la suite) :

(a) Comment traduire, sur le modèle, les règles R1, R2, R3 ?

(b) Comment traduire, sur le modèle, les règles R4 et R5, notamment en termes de conditions aux limites ?

(c) Comment traduire d'un point de vue *discret* les règles R4 et R5 ? En déduire les modifications qu'il faut apporter aux systèmes linéaires (B.1) (matrices <u>et</u> seconds membres) pour résoudre le problème numériquement.

B.2.2. **Implémentation, validation, discussion.** Implémenter le schéma sous `scilab` et déterminer la solution numérique pour le jeu de données de votre choix. Discuter l'influence de certains paramètres du modèle sur la dynamique du système.