# Partiel

**Le partiel est prévu pour une durée de 1 heure 30. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits. Une attention particulière sera portée à la rigueur des réponses.**
En bleu, la correction de chaque question.

---

*Le sujet traite de modèles de dynamiques de population. Trois modèles de complexité croissante sont proposés successivement.*

## 1 Un modèle très simple

On considère une population de densité $x$ régie par le modèle

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

pour une densité de population initiale $x_0$ donnée.

1.1. Décrire qualitativement ce modèle.

**Correction :** Ce modèle de dynamique d'une population isolée décrit une croissance illimitée de la population, qui dispose ainsi de ressources infinies pour se développer et qui n'est pas menacée par une autre espèce.

1.2. Rappeler la solution du système (1).

**Correction :** Ce système, de Malthus, a pour solution $x(t) = x_0 e^t$ et présente donc une croissance exponentielle.

1.3. Citer une limitation de ce modèle.

**Correction :** Ce modèle présuppose l'accès à des ressources infinies, ce qui n'est pas réaliste.

## 2 Un modèle plus évolué

On considère désormais une population de densité $x$ régie par le modèle

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\big(1 - x(t)\big), \\ x(t_*) = x_*, \end{cases} \tag{2}$$

pour une densité de population $x_*$ donnée pour un certain temps $t_*$.

2.1. Décrire qualitativement ce modèle et en particulier l'amélioration par rapport au modèle (1).

**Correction :** La différence entre le modèle (1) et le modèle (2) tient en la présence du terme $-x(t)^2 \leqslant 0$. C'est donc un terme de pénalisation qui traduit le fait que plus la population est importante, plus sa croissance est pénalisée. Cela correspond à une limitation des ressources.

2.2. Justifier que si $x_* \in [0,1]$, alors la solution $t \mapsto x(t)$ reste bornée dans $[0,1]$.

**Correction :** On note tout d'abord que le système (2) se récrit sous la forme

$$\begin{cases} x'(t) = f\big(x(t)\big), \\ x(t_*) = x_*, \end{cases}$$

où $f : y \mapsto y(1-y)$ est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle est localement lipschitzienne. On en déduit, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'existence et l'unicité d'une solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle maximal $J \subset \mathbb{R}$ contenant $t_*$.

Si $x_* = 0$, alors l'unique solution est donnée par $\overline{x}(t) = 0$ et $J = \mathbb{R}$. De même, si $x_* = 1$, l'unique solution est donnée par $\underline{x}(t) = 1$ et $J = \mathbb{R}$.

Si $x_* \in ]0,1[$, l'unique solution correspondante ne peut pas croiser les autres solutions $\overline{x}$ et $\underline{x}$. De plus, par continuité de la solution, partant de $]0,1[$, elle reste dans $]0,1[$ sur l'intervalle $J$, puis, par application du théorème d'explosion en temps fini, on en déduit que la solution est globale.

2.3. Vérifier que l'unique solution de (2) est donnée par :

$$\hat{x}(t) = \frac{x_* \exp(t - t_*)}{1 - x_* + x_* \exp(t - t_*)}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

**Correction :** Compte-tenu de l'expression de $\hat{x}$, on vérifie d'une part que $\hat{x}(t_*) = x_*$ et d'autre part que le dénominateur ne s'annule pas, que la fonction est dérivable et que :

$$1 - \hat{x}(t) = \frac{1 - x_*}{1 - x_* + x_* \exp(t - t_*)},$$
$$\hat{x}'(t) = \frac{x_*(1 - x_*) \exp(t - t_*)}{[1 - x_* + x_* \exp(t - t_*)]^2}.$$

On a donc bien $\hat{x}' = \hat{x}(1 - \hat{x})$. Par unicité, $\hat{x}$ est bien l'unique solution.

2.4. **(bonus)** On souhaite approcher numériquement la solution $\hat{x}$ de (2). On se donne un pas de maillage $\delta t > 0$ et on définit une suite de noeuds $t_n = t_* + n\delta t$, $n \in \mathbb{N}$. On cherche ainsi à construire une suite $(x_n)$ qui approche $\hat{x}(t_n)$.

(a) Écrire le schéma d'Euler explicite pour l'EDO (2) qui définit la suite $(x_n)$.

**Correction :** Le schéma d'Euler explicite appliqué à l'EDO (2) s'écrit

$$x_{n+1} = x_n + \delta t f(x_n) \implies x_{n+1} = x_n \left[1 + \delta t(1 - x_n)\right].$$

(b) Pour $x_* = \frac{1}{2}$, montrer que pour un choix de $\delta t$ trop grand, la solution numérique $(x_n)$ ne reste pas dans $[0,1]$.

**Correction :** Pour $x_0 = \frac{1}{2}$, il vient $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\delta t}{2}\right)$. On constate alors que si $\delta t > 2$, on a $x_1 > 1$, ce qui n'est pas admissible.

(c) Prouver par récurrence que si $x_* \in [0,1]$ et si $\delta t \leqslant 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$.

**Correction :** Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$. La propriété est vraie pour $n = 0$ par hypothèse. Supposons que $x_n \in [0,1]$. Alors on a directement $x_{n+1} \geqslant 0$. On a également :

$$x_{n+1} - 1 = x_n - 1 + \delta t \, x_n(1 - x_n) = (x_n - 1)(1 - x_n \delta t).$$

Pour $x_n \geqslant 1$ et $\delta t \geqslant 1$, le membre de droite est négatif, ce qui montre que $x_{n+1} \leqslant 1$. On a ainsi montré $x_n \in [0,1] \implies x_{n+1} \in [0,1]$.

(d) En déduire que la suite $(x_n)$ converge vers 1.

**Correction :** On vérifie que la suite est croissante. En effet, $x_{n+1} - x_n = \delta t \, x_n(1 - x_n) \geqslant 0$ d'après la question précédente. La suite est donc croissante et bornée (dans $[0,1]$) : elle converge. La limite $\ell$ vérifie nécessairement la relation $\ell = \ell\,[1 + \delta t(1 - \ell)]$, soit $\ell = 0$ (impossible car la suite est positive et croissante, sauf dans le cas $x_* = 0$) ou $\ell = 1$. La suite $(x_n)$ admet donc la bonne limite qui correspond à $\lim\limits_{t \to +\infty} \hat{x}(t)$.

## 3 Un modèle à 2 populations

On considère enfin deux densités de population $x$ et $y$ qui vérifient le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left[1 - x(t) + \dfrac{y(t)}{1+y(t)}\right], & x(0) = x_0, \\ y'(t) = y(t)\left[-\dfrac{1}{2} + \dfrac{x(t)}{1+y(t)}\right], & y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

3.1. Ce modèle est-il un système de compétition, de type prédateur-proie ou de mutualisme ? Justifier.

**Correction :** On constate que les termes d'interaction sont égaux $\frac{xy}{1+y}$ et ont un signe positif. C'est donc un situation de mutualisme : la présence d'une espèce est bénéfique au développement de l'autre.

3.2. Le système (3) a pour but de modéliser une population de plantes et une population de polinisateurs. Identifier $x$ et $y$ parmi ces deux populations.

**Correction :** On voit que la population $y$ a un terme de dynamique interne qui entraîne (seul) une décroissance exponentielle, alors que la population $x$ a un terme de dynamique interne qui est de type logistique (Verhulst), qui donne une limite asymptotiquement stable (1). Les plantes meurent en l'absence de polinisateurs : on en déduit que $y$ représente la population de plantes et $x$ celle de polinisateurs.

3.3. Expliquer qualitativement chacun des termes présents dans le système (3).

**Correction :** Le terme $x(1-x)$ est une croissance de type Verhulst pour la population $x$, qui correspond à un équilibre entre une croissance exponentielle ($x$) et une limitation des ressources ($-x^2$).

Le terme $-\frac{y}{2}$ décrit une extinction exponentielle de la population $y$.

Le terme d'interaction $\frac{xy}{1+y}$ décrit d'un côté un développement des deux espèces en cas de rencontres ($xy$) et un phénomène de limitation $(1+y)$ qui montre qu'un polinisateur ne peut poliniser qu'une quantité finie de plantes. Plus le nombre de plantes est important, plus le terme d'interactions diminue.

3.4. Prouver qu'il existe une unique solution maximale au problème différentiel (3).

**Correction :** On récrit le modèle (3) sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{Y}'(t) = \mathbf{F}\big(\mathbf{Y}(t)\big), \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0, \end{cases} \tag{4}$$

où $\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (z_1, z_2) \longmapsto \begin{pmatrix} z_1(1-z_1) + \frac{z_1 z_2}{1+z_2}, \\ -\frac{z_2}{2} + \frac{z_1 z_2}{1+z_2}. \end{pmatrix}$$

Sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, la fonction $\mathbf{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ donc est localement lipschitzienne. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure alors l'existence d'une solution $\mathbf{Y}$ sur un intervalle maximal $J \subset \mathbb{R}$ contenant $0$.

3.5. Quelle est la solution lorsque $x_0 = 0$ ? lorsque $y_0 = 0$ ?

**Correction :** Lorsque $x_0 = 0$, on vérifie que $\mathbf{Y}_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 e^{-t/2} \end{pmatrix}$ vérifie bien le système (4). Par unicité, on en déduit que c'est la seule solution.

De même, si $y_0 = 0$, on vérifie que $\mathbf{Y}_\beta(t) = \begin{pmatrix} \frac{x_0 e^t}{1 - x_0 + x_0 e^t} \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie bien le système (4). Par unicité, on en déduit que c'est la seule solution.

3.6. En déduire que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, les solutions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ ne s'annulent pas.

**Correction :** On part de $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. On rappelle que l'unique solution maximale $\mathbf{Y}$ est telle que les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont continues. Supposons qu'il existe $t_1$ tel que $x(t_1) = 0$ et $y(t_1) = y_1 > 0$. Alors on définit

$$\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 e^{-(t-t_1)/2} \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Y}_1$ vérifient

$$\begin{cases} \mathbf{Y}'(t) = \mathbf{F}\big(\mathbf{Y}(t)\big), \\ \mathbf{Y}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Par application du théorème de Cauchy-Lipschitz, l'unicité donne $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_1(t)$, ce qui est absurde car $x(0) = x_0 \neq 0 = x_1(0)$. Il n'existe donc pas d'instant auquel $x$ s'annule avant $y$.

On procède de même dans le cas il existe $t_2$ tel que $x(t_2) = x_2 > 0$ et $y(t_2) = 0$. On pose alors

$$\mathbf{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{x_2 \exp(t-t_2)}{1 - x_2 + x_2 \exp(t-t_2)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient une absurdité et il n'existe pas d'instant auquel $y$ s'annule avant $x$.

En conclusion, $x$ et $y$ ne s'annulent jamais. Par continuité, elles sont positives sur l'intervalle $J$.

3.7. En utilisant la question précédente, montrer que :

$$x(t) + y(t) \leqslant (x_0 + y_0)e^{3t}.$$

*On pourra pour cela majorer $x'(t) + y'(t)$ puis intégrer.*

**Correction :** En sommant les deux équations du système (3), on obtient :

$$\begin{aligned} x'(t) + y'(t) &= x(t) - x(t)^2 - \frac{y(t)}{2} + 2\frac{x(t)y(t)}{1 + y(t)} \\ &\leqslant x(t) + 2x(t)\frac{y(t)}{1 + y(t)} && \text{par positivité de } y \\ &\leqslant 3x(t) && \text{car } \frac{y}{1+y} \leqslant 1 \\ &\leqslant 3\big(x(t) + y(t)\big) && \text{par positivité de } y. \end{aligned}$$

On obtient l'inégalité souhaitée en appliquant le lemme de Grönwall.

3.8. En déduire que les solutions sont globales en temps.

**Correction :** Supposons que $J = ]0, a[$ avec $a$ un nombre fini. Alors on voit que

$$0 \leqslant \lim_{t \to a} [x(t) + y(t)] \leqslant (x_0 + y_0)e^{3a} < \infty.$$

Comme $x$ et $y$ sont positives, on déduit que les deux fonctions $x$ et $y$ admettent une limite finie en $a$. Par le théorème d'explosion en temps fini, on conclut à une absurdité et les solutions sont globales.

3.9. Montrer que le système (3) admet quatre états d'équilibre.

**Correction :** Les états d'équilibre vérifient

$$\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \overline{x}\left[2 - \overline{x} - \frac{1}{1 + \overline{y}}\right] = 0 \text{ et } \overline{y}\left[-\frac{1}{2} + \frac{\overline{x}}{1 + \overline{y}}\right] = 0.$$

Il y a deux états d'équilibre triviaux, à savoir $(0,0)$ et $(1,0)$. Les éventuels autres états d'équilibre sont alors définis par

$$\overline{y} = 2\overline{x} - 1 \text{ et } 2 - \overline{x} - \frac{1}{2\overline{x}} = 0 \implies 2\overline{x}^2 - 4\overline{x} + 1 = 0,$$

ce qui donne pour états d'équilibre $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$ et $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right)$. Remarquons que le dernier n'est pas admissible car il conne $\overline{y} < 0$.

3.10. Prouver qu'un seul de ces états d'équilibre est stable. *On rappelle que* $\sqrt{2} \approx 1.414$.

**Correction :** Pour déterminer la stabilité de chacun de ces quatre points d'équilibre, commençons par calculer la jacobienne du flux $\mathbf{F}$ :

$$\operatorname{Jac}\mathbf{F}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 2 - 2z_1 - \frac{1}{1+z_2} & \frac{z_1}{(1+z_2)^2} \\ \frac{z_2}{1+z_2} & -\frac{1}{2} + \frac{z_1}{(1+z_2)^2} \end{pmatrix}.$$

On a donc tout d'abord :

$$\operatorname{Jac}\mathbf{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{Jac}\mathbf{F}(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Chacune de ces matrices admet une valeur propre négative et une valeur propre positive. Les points $(0, 0$ et $(1, 0)$ sont donc instables. Posons ensuite $\alpha \in \left\{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, de sorte que les deux autres états d'équilibre sont de la forme $(\alpha, 2\alpha - 1)$. D'où :

$$\mathbf{J} = \operatorname{Jac}\mathbf{F}(\alpha, 2\alpha - 1) = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \alpha - 1 & \frac{1-\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice s'écrit

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{Tr}\mathbf{J})\lambda + \det\mathbf{J} = \lambda^2 + \frac{3\alpha - 1}{2}\lambda + (\alpha - 1)^2.$$

Le terme constant (qui correspond au produit des racines) est toujours strictement positif ce qui implique que les racines sont de même signe.

Dans le cas $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.293$, le terme de degré 1 (dont l'opposé correspond à la somme des racines) est négatif : les racines sont donc positives et le point est instable.

Dans le cas $\alpha = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.707$, le terme de degré 1 est positif. Les racines sont donc strictement négatives et le point est asymptotiquement stable.

3.11. Commenter le résultat de la question précédente.

**Correction :** Les points d'équilibre déterminés dans les questions précédentes permettent d'affirmer que :

- S'il n'y a aucune des deux espèces initialement ($x_0 = y_0 = 0$), alors aucune n'apparaît spontanément.
- Si initialement, il n'y a que des polinisateurs ($x_0 = 1, y_0 = 0$), la population reste constante.
- Si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors il n'y a pas d'extinction des deux populations qui convergent vers $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour les polinisateurs et vers $1 + \sqrt{2}$ pour les plantes.

3.12. Proposer un schéma numérique pour approcher les solutions du modèle (3).

**Correction :** Reprenons les notations de la question 2.4. Par exemple, le schéma d'Euler explicite pour le modèle (4) s'écrit :

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \delta t \mathbf{F}(\mathbf{Y}_n) \iff \begin{cases} x_{n+1} = x_n \left[1 + \delta t \left(1 - x_n + \frac{y_n}{1+y_n}\right)\right], \\ y_{n+1} = y_n \left[1 + \delta t \left(-\frac{1}{2} + \frac{x_n}{1+y_n}\right)\right]. \end{cases}$$