

TP : système de Lotka-Volterra

1	Sujet	1
1.1	Schémas numériques	1
1.2	Restriction en ressources	2
1.3	Saturation de la consommation	2
1.4	Un modèle réaliste	2
1.5	Calcul de la période pour le modèle de Lotka-Volterra	2
1.6	Interactions entre trois espèces	2
A	Rappel sur les méthodes numériques	3
A.1	Méthode d’Euler explicite	3
A.2	Méthode d’Euler implicite	4
A.3	Variantes par linéarisation	4
B	Calcul de la période dans le modèle (LV)	5

1 Sujet

On considère le système de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNP, \\ \frac{dP}{dt} = -cP + dNP. \end{cases} \tag{LV}$$

Ce modèle possède des propriétés importantes : pour toute donnée initiale $(N_0, P_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,

- le modèle de Lotka-Volterra admet une unique solution globale $t \mapsto (N(t), P(t))$;
- $N(t) > 0$ et $P(t) > 0$ pour tout $t > 0$;
- la solution est périodique.

Le but de ce TP est de calculer une solution approchée du système et, ce faisant, simuler numériquement le comportement d’une population de proies et de prédateurs.

1.1 Schémas numériques

Effectuer une simulation du modèle (LV) à l’aide de différents schémas numériques :

- 1.1. avec les schémas numériques proposés dans l’annexe A. (schéma d’Euler explicite ainsi que les quatre variantes par linéarisation du schéma d’Euler implicite)
- 1.2. avec le solveur de `scilab` (schéma d’Adams ou schéma de Runge-Kutta d’ordre 4, par exemple). On consultera l’aide de `scilab` en utilisant la commande : `> help ode`.

On utilisera les paramètres suivants :

- intervalle de temps $[0, T]$ avec temps final : $T = 10$,
- pas de temps : $h = 0.01$,
- paramètres du modèle : $a = 3, b = 1, c = 2, d = 1$,
- donnée de Cauchy $(N(0), P(0)) = (1, 2)$.

En particulier, étudier le diagramme de phase $(N(t), P(t))$ et la conservation de l'intégrale première

$$t \mapsto \mathcal{H}(N(t), P(t)), \quad \mathcal{H}(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y.$$

Qu'observe-t-on si on effectue des simulations sur des intervalles de temps plus grands ($T = 100$ par exemple, quitte à augmenter le pas de temps pour limiter les coûts de calculs) ou si on utilise un pas de temps plus grand (prendre $h = 0.1$ par exemple) ?

Dans la suite, on utilisera préférentiellement le solveur par défaut de `scilab`.

1.2 Restriction en ressources

Ajouter une hypothèse de restriction en ressources pour les proies dans le modèle :

$$a \leftarrow a \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

Qu'observe-t-on (prendre $K = 2$, $K = 10$, par exemple) ?

1.3 Saturation de la consommation

Ajouter une hypothèse de restriction sur la consommation maximale de proies par les prédateurs.

$$b \leftarrow \frac{b}{N + e}.$$

Qu'observe-t-on (prendre $K = 10$, $e = 15$ et un intervalle de temps $(0, T)$ avec $T = 30$, par exemple) ?

1.4 Un modèle réaliste

Étudier le système :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - b \frac{NP}{N + e}, \\ \frac{dP}{dt} = cP \left(1 - d \frac{P}{N}\right). \end{cases} \quad (1.1)$$

En particulier, tester le modèle (1.1) avec $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 1$, $K = 10$, $e = 15$.

1.5 Calcul de la période pour le modèle de Lotka-Volterra

Dans le cadre du modèle périodique, compte-tenu des difficultés à approcher convenablement la solution par une méthode numérique, on renonce à utiliser la solution calculée pour estimer la période. Afin de calculer la période de la solution du système, on utilise le résultat établi en annexe :

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mathcal{F}(\theta)}.$$

1.6 Interactions entre trois espèces

Ajouter une troisième espèce en choisissant les propriétés de cette espèce (terme de naissance et interaction avec les autres espèces).

A Rappel sur les méthodes numériques

Un grand nombre de problèmes issus de la physique, de la biologie, de l'économie ou de la médecine s'écrivent sous la forme d'une *équation différentielle ordinaire* (EDO) ou d'un *système d'EDO*. On s'intéresse ici non pas à l'étude du cadre mathématique de ces équations mais à leur résolution numérique effective.

Nous nous intéressons dans un premier temps à des équations du type

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)), & t > 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (\text{P})$$

L'inconnue est le vecteur $t \mapsto \mathbf{u}(t)$. On connaît la valeur de \mathbf{u} à l'instant initial $t = 0$ (c'est la donnée initiale \mathbf{u}_0 , que l'on suppose donc connue) et on cherche à connaître l'évolution de la fonction \mathbf{u} en fonction du temps t .

Dans la suite, on s'intéresse à la détermination de méthodes numériques qui permettent d'approcher la solution : pour cela, on procède à une subdivision de l'intervalle de temps $[0, T[$ en petits pas de temps de durée h : on pose pour cela $t_n = nh$, soit

$$t_0 = 0 < t_1 = h < t_2 = 2h < \dots < t_N = Nh = T.$$

Plutôt que de déterminer $t \mapsto \mathbf{u}(t)$, nous allons chercher à construire une suite $(\mathbf{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui approche la solution aux temps t_n :

$$\mathbf{U}_n \simeq \mathbf{u}(t_n).$$

Ainsi, au lieu de résoudre explicitement un problème de nature *continue* (EDO), nous allons considérer des méthodes de numériques basées sur la résolution d'un problème de nature *discrète* qui approche le problème initial (récurrence). Évidemment, nous allons voir qu'il existe de nombreuses possibilités de construire une telle solution numérique (discrète) $(\mathbf{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui reproduit le comportement de la solution physique (continue) $t \mapsto \mathbf{u}(t)$.

Intégrons l'équation du problème (P) sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$. On obtient

$$\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) dt$$

Comme indiqué précédemment, $\mathbf{u}(t_{n+1})$ sera approché par \mathbf{U}_{n+1} , $\mathbf{u}(t_n)$ sera approché par \mathbf{U}_n , mais il reste à approcher le terme intégral

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) dt$$

à l'aide de \mathbf{U}_n et \mathbf{U}_{n+1} . Le choix de l'approximation de cette intégrale engendre plusieurs types de méthodes.

A.1 Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler *explicite* consiste donc à évaluer le terme intégral en utilisant la méthode des *rectangles à gauche* :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) dt = h \mathbf{f}(\mathbf{u}(t_n)) + \mathcal{O}(h^2). \implies \mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n) = h \mathbf{f}(\mathbf{u}(t_n)) + \mathcal{O}(h^2).$$

Cela permet la construction d'une suite $(\mathbf{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en négligeant le terme d'erreur :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h \mathbf{f}(\mathbf{U}_n),$$

en partant de $\mathbf{U}_0 = \mathbf{u}_0$ qui est connue.

La méthode d'Euler explicite peut être implantée de façon simple : c'est une méthode directe dont chaque étape ne nécessite que l'évaluation de la fonction f . Néanmoins, cette méthode peut être imprécise et ne pas préserver certaines propriétés fondamentales de la solution exacte (positivité des composantes de la solution, périodicité, ...) lorsque le pas de temps h est trop grand.

Application : modèle de Lotka-Volterra et schéma d'Euler explicite. La mise en œuvre de la méthode d'Euler explicite consiste à écrire :

- $N_0 = N(0)$, $P_0 = P(0)$ (la population de chaque espèce, au temps initial, est connue) ;
- Pour tout $n \geq 0$,

$$N_{n+1} = N_n + h(aN_n - bN_nP_n),$$

$$P_{n+1} = P_n + h(-cP_n + dN_nP_n).$$

A.2 Méthode d'Euler implicite

Comme nous venons de le voir, la méthode d'Euler explicite est basée sur une évaluation du terme intégral par la méthode des rectangles à gauche. Mais on peut également évaluer le terme intégral par la méthode des *rectangles à droite*, ce qui définit la méthode d'*Euler implicite* :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}).$$

Le schéma numérique est alors le suivant :

- $\mathbf{U}_0 = \mathbf{u}_0$ (initialisation : la valeur initiale \mathbf{u}_0 est connue)
- Pour tout $n > 0$, $\mathbf{U}_{n+1} - h\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}) = \mathbf{U}_n$.

La méthode d'Euler implicite est beaucoup plus délicate à mettre en œuvre que la méthode d'Euler explicite : en effet, on peut remarquer qu'à chaque itération en temps, la détermination de \mathbf{U}_{n+1} nécessite la résolution d'un système *non linéaire*. S'il existe des méthodes de résolution efficaces pour ce type de problème (méthode de dichotomie, de la sécante, de la fausse position en 1D, méthode de Newton en 1D ou multi-D...), la mise en œuvre de la méthode d'Euler implicite est plus coûteuse (en termes de coûts de calculs) que la méthode d'Euler explicite). En revanche, elle possède quelques avantages d'un point de vue numérique : en particulier, il n'est pas nécessaire de choisir un pas de temps trop petit pour assurer la stabilité numérique de la solution approchée : même si h est grand, la solution numérique « n'explose » pas.

Nous n'allons pas nous attacher à la résolution numérique du modèle de Lotka-Volterra par la méthode d'Euler implicite, mais nous pouvons tout de même écrire ce schéma.

Application : modèle de Lotka-Volterra et schéma d'Euler implicite.

- $N_0 = N(0)$, $P_0 = P(0)$ (la population de chaque espèce, au temps initial, est connue) ;
- Pour tout $n \geq 0$,

$$N_{n+1} = N_n + h(aN_{n+1} - bN_{n+1}P_{n+1}),$$

$$P_{n+1} = P_n + h(-cP_{n+1} + dN_{n+1}P_{n+1}).$$

À chaque pas de temps, il faut résoudre un système *non-linéaire*. C'est possible mais cela nécessite de mettre en œuvre des outils de résolution un peu sophistiqués (algorithme de Newton, par exemple). Il est possible de conserver une *part d'implicitation* en conservant une structure linéaire : c'est le principe de linéarisation que nous allons voir pas la suite.

A.3 Variantes par linéarisation

Il est possible de se construire des méthodes « intermédiaires » aux deux précédentes méthodes. L'idée est de construire des méthodes *implicites* pour lesquelles la résolution du système associé, à chaque étape, est facilement traitable. En particulier, lorsque le système à résoudre à chaque étape est *linéaire*, on peut espérer conjuguer les bonnes propriétés de la méthode d'Euler explicite (facilité de mise en œuvre : ici simple résolution d'un système linéaire) et de la méthode d'Euler implicite (stabilité numérique).

Le schéma

$$\begin{cases} N_{n+1} = N_n + h(aN_{n+1} - bN_nP_{n+1}), \\ P_{n+1} = P_n + h(-cP_{n+1} + dN_nP_{n+1}). \end{cases} \quad (\text{V}_1)$$

consiste, à chaque itération en temps, à déterminer (N_{n+1}, P_{n+1}) comme la solution du système linéaire suivant (pour lequel (N_n, P_n) est connu) :

$$\begin{pmatrix} 1 - ha & hbN_n \\ 0 & 1 + hc - hdN_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_n \\ P_n \end{pmatrix}.$$

Le schéma

$$\begin{cases} N_{n+1} = N_n + h(aN_{n+1} - bN_{n+1}P_n), \\ P_{n+1} = P_n + h(-cP_{n+1} + dN_{n+1}P_n). \end{cases} \quad (\text{V}_2)$$

consiste, à chaque itération en temps, à déterminer (N_{n+1}, P_{n+1}) comme la solution du système linéaire suivant (pour lequel (N_n, P_n) est connu) :

$$\begin{pmatrix} 1 - ha + hbP_n & 0 \\ -hdP_n & 1 + hc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_n \\ P_n \end{pmatrix}.$$

Le schéma

$$\begin{cases} N_{n+1} = N_n + h(aN_{n+1} - bN_nP_{n+1}), \\ P_{n+1} = P_n + h(-cP_{n+1} + dN_{n+1}P_n). \end{cases} \quad (\text{V}_3)$$

consiste, à chaque itération en temps, à déterminer (N_{n+1}, P_{n+1}) comme la solution du système linéaire suivant (pour lequel (N_n, P_n) est connu) :

$$\begin{pmatrix} 1 - ha & hbN_n \\ -hdP_n & 1 + hc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_n \\ P_n \end{pmatrix}.$$

Le schéma

$$\begin{cases} N_{n+1} = N_n + h(aN_{n+1} - bN_{n+1}P_n), \\ P_{n+1} = P_n + h(-cP_{n+1} + dN_nP_{n+1}). \end{cases} \quad (\text{V}_4)$$

consiste, à chaque itération en temps, à déterminer (N_{n+1}, P_{n+1}) comme la solution du système linéaire suivant (pour lequel (N_n, P_n) est connu) :

$$\begin{pmatrix} 1 - ha + hbP_n & 0 \\ 0 & 1 + hc - hdN_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_n \\ P_n \end{pmatrix}.$$

Remarquons en particulier, que ce dernier schéma est très simple à mettre en œuvre, la matrice associée étant diagonale.

B Calcul de la période dans le modèle (LV)

Si on effectue le changement de fonction inconnue

$$x(t) = \ln\left(\frac{d}{c}N(t)\right), \quad y(t) = \ln\left(\frac{b}{a}P(t)\right),$$

le point d'équilibre correspondant à $(c/d, a/b)$ est $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Par ailleurs, si on pose

$$G(x, y) := a(y - e^y) + c(x - e^x),$$

le système de Lotka-Volterra devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \partial_y G(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = -\partial_x G(x, y). \end{cases} \quad (\text{LV}')$$

Ce système est donc *hamiltonien* :

$$\forall t > 0, \quad G(x(t), y(t)) = G(x(0), y(0)).$$

Exercice B.1. *Montrer que, par le changement d'inconnues*

$$x(t) = \ln\left(\frac{d}{c}N(t)\right), \quad y(t) = \ln\left(\frac{b}{a}P(t)\right),$$

le système (LV) est équivalent au système (LV').

Exercice B.2. Montrer que le système (LV') est hamiltonien.

Le changement de variables effectué précédemment permet de centrer la description de la dynamique $t \mapsto (x(t), y(t))$ autour du point d'équilibre $(0, 0)$. La période associée à la trajectoire de (x, y) est la même que celle qui est associée à la trajectoire de (N, P) car l'échelle de temps n'a pas été modifiée. Afin de décrire la dynamique autour du point d'équilibre, on utilise une nouvelle paramétrisation qui permet de décrire la dynamique en termes de portraits de phase $(x(t), y(t))$; ces portraits de phase étant des courbes fermées autour du point d'équilibre $(0, 0)$, on définit :

$$x(t) = r(t) \cos(\theta(t)), \quad y(t) = r(t) \sin(\theta(t)).$$

La fonction $t \mapsto r(t)$ peut être re-paramétrée en écrivant :

$$r(t) = g(\theta(t)).$$

La dynamique du système est alors décrite par la connaissance de

- la fonction $t \mapsto \theta(t)$;
- la fonction $t \mapsto r(t)$ ou, alternativement, la fonction g .

Cette paramétrisation permet alors de déterminer la période des trajectoires :

Théorème B.1 (Calcul de la période). Soient F la fonction définie par

$$F : (r, \theta) \mapsto G(r \cos \theta, r \sin \theta) - G(x(0), y(0))$$

et g la fonction définie implicitement par :

$$F(g(\theta), \theta) = 0.$$

La période de $t \mapsto (x(t), y(t))$ est donnée par

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mathcal{F}(\theta)} \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}(\theta) := -\frac{\partial_r F(g(\theta), \theta)}{g(\theta)},$$

Remarques B.1. Dans le théorème ci-dessus, la définition de la fonction F repose précisément sur la propriété hamiltonnienne du système, qui se traduit par

$$\forall t > 0, \quad F(r(t), \theta(t)) = 0.$$

Dès lors, la détermination de la fonction $\theta \mapsto g(\theta)$ (définie implicitement) permet de réduire la dynamique à la connaissance de $t \mapsto \theta(t)$.

Démonstration. On procède en plusieurs étapes.

1. On montre d'abord, par le théorème des fonctions implicites, que g est bien définie.
2. On établit l'identité :

$$\theta'(t) = \mathcal{F}(\theta(t)). \tag{B.1}$$

Exercice B.3. Montrer que la dynamique du système est décrite par l'équation différentielle (B.1).

3. Soit t_0 tel que $\theta(t_0) = 0$, alors $\theta(t_0 + T) = 2\pi$. Le changement de variable $t := t(\theta)$ est admissible (car strictement croissant) :

$$T = \int_{t_0}^{t_0+T} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\theta'(t(\theta))} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mathcal{F}(\theta)}.$$

□

Afin d'évaluer numériquement la période, on utilise la méthode des trapèzes. La raison de ce choix réside dans le résultat suivant :

Théorème B.2. Soit f une fonction T -périodique sur \mathbb{R} . On suppose que $f \in C^m(\mathbb{R})$ et on note $T_h(f)$ l'approximation obtenue par la méthode des trapèzes de pas h pour le calcul de l'intégrale de f sur $[0, T]$. Alors, il existe $c_m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left| \int_0^T f(t) dt - T_h(f) \right| \leq c_m h^m.$$

Ce résultat prouve que l'ordre de convergence de la méthode des trapèzes pour les fonctions périodiques est lié à la régularité de la fonction à intégrer. C'est tout-à-fait remarquable car dans le cas général, la convergence est en h^2 dès que la fonction à intégrer est de classe C^2 , mais ne s'améliore pas. Notons enfin que la méthode des rectangles coïncide avec celle des trapèzes pour les fonctions continues périodiques, et que le résultat précédent est faux pour la méthode de Simpson.

Dans notre exemple, la fonction \mathcal{F} est de classe C^∞ sur \mathbb{R} donc la convergence est surlinéaire. D'un point de vue pratique, il faut pouvoir évaluer la fonction \mathcal{F} en un point θ donné. Or elle fait intervenir g définie implicitement par

$$F(g(\theta), \theta) = 0.$$

À θ fixé, il s'agit donc de résoudre l'équation non-linéaire $F(r, \theta) = 0$, ce qui peut être fait avec la méthode de Newton.