

french



# 2M156 : analyse vectorielle

---

Yohan PENEL

Equipe ANGE (CEREMA, Inria, SU & CNRS) – [yohan.penel@inria.fr](mailto:yohan.penel@inria.fr)



# Fiche pédagogique : UE 2M156

## Descriptif de l'UE

Titre : Analyse vectorielle

Nombre d'heures : 12 heures de cours magistral, 18 heures de travaux dirigés

Crédits ECTS : 3

Semestre : S3

Modalités d'évaluation : partiel et examen (75%), contrôle continu (25%)

Pré-requis

- Licence 1 parcours MIPI : fonctions d'une variable (continuité, dérivabilité, développements limités) : 1M001, intégrales (calcul d'aires, approximations par les méthodes des rectangles et des trapèzes) : 1M002
- Licence 1 parcours PCGI : fonctions, intégration : 1M003
- Licence 1 parcours BCG : calculs de dérivées, rappels d'intégration : 1M005

Public concerné

- Parcours bi-disciplinaires avec mineure Mathématiques

## Objectifs de l'UE

Toutes les notions concernent la dimension 2. La généralisation aux dimensions supérieures ne fait pas l'objet de ce cours, seuls quelques cas particuliers fondamentaux sont évoqués.

- Appréhender le calcul différentiel pour les fonctions de deux variables
- Développer des outils de calcul intégral en dimension 2
- Faire le lien entre intégrales en dimensions 1 et 2
- Connaître les applications usuelles dans  $\mathbb{R}^3$

## Planning prévisionnel

- Cours magistraux du 06/09 au 29/11
- TD du 14/09 au 19/12
- Partiel le 08/11
- Examen en janvier 2019



# Table des matières

french

<b>0</b>	<b>Notions et outils de base</b>	<b>1</b>
0.1	Fonctions d'une variable . . . . .	1
0.1.1	Limites et continuité . . . . .	2
0.1.2	Dérivabilité . . . . .	3
0.1.3	Tangentes et développements limités . . . . .	4
0.1.4	Bijektivité et application réciproque . . . . .	5
0.1.5	Intégration . . . . .	5
0.2	Éléments de géométrie . . . . .	8
0.2.1	Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	8
0.2.2	Géométrie dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	9
0.3	Formules de trigonométrie . . . . .	11
<b>1</b>	<b>Courbes planes paramétrées</b>	<b>13</b>
1.1	Introduction . . . . .	13
1.1.1	Notion de courbes paramétrées . . . . .	13
1.1.2	Exemples classiques . . . . .	14
1.2	Cadre général . . . . .	15
1.2.1	Symétries . . . . .	16
1.2.2	Variations et tangentes . . . . .	17
1.2.3	Comportement au voisinage de points particuliers . . . . .	17
1.2.4	Longueur d'une courbe . . . . .	19
1.2.5	Courbure . . . . .	19
1.3	Méthodologie . . . . .	20
1.4	Exemple complet : l'astroïde . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Calcul différentiel dans <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>25</b>
2.1	Fonctions de deux variables . . . . .	25
2.1.1	Continuité . . . . .	26
2.1.2	Dérivées partielles . . . . .	26
2.2	Opérateurs différentiels . . . . .	29
2.2.1	Définitions . . . . .	29
2.2.2	Expressions en coordonnées polaires . . . . .	32
2.3	Lignes de niveau . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Calcul intégral dans <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>35</b>
3.1	Intégrales curvilignes; circulation et flux d'un champ de vecteurs . . . . .	35
3.2	Intégrales doubles . . . . .	37
3.2.1	Définition . . . . .	37

3.2.2	Théorème de Fubini . . . . .	38
3.2.3	Changement de variables . . . . .	38
3.2.4	Formule de Green-Riemann . . . . .	39
3.2.5	Application sur le disque . . . . .	39
3.3	Quelques applications . . . . .	40
3.3.1	Calcul d'aires . . . . .	40
3.3.2	Centre et moments d'inertie . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Quelques exemples dans <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>43</b>
4.1	Opérateurs différentiels . . . . .	43
4.1.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	43
4.1.2	Autres systèmes de coordonnées . . . . .	44
4.2	Intégrales triples . . . . .	45
4.2.1	Domaine quelconque . . . . .	45
4.2.2	Cylindre . . . . .	46
4.2.3	Sphère . . . . .	46



# Avant-propos

Ce cours a pour but d'étendre à l'espace  $\mathbb{R}^2$  les résultats de première année sur les fonctions d'une variable. On abordera en particulier la notion de dérivée partielle et les différents opérateurs différentiels associés. On ne traitera pas des aspects d'optimisation en dimension 2. La généralisation des outils d'analyse à la dimension 2 est nécessaire pour traiter un certain nombre de problèmes de modélisation en mécanique, mécanique des fluides, électromagnétisme, ...

On s'intéressera ensuite à la notion d'intégrale en dimensions supérieures à 1, tout d'abord l'intégrale curviligne puis l'intégrale double et les formules de passage de l'une à l'autre. On n'évoquera pas les formes différentielles pour se focaliser sur l'approche *champs de vecteurs*.

Ce cours ne contient aucune démonstration. Le but est d'illustrer autant que possible chaque concept par des exemples usuels dans ces domaines (coordonnées polaires en dimension 2, intégration sur une sphère en dimension 3, ...) afin de donner des automatismes pour traiter les calculs d'intégrales.

Les résultats principaux de ce cours sont :

- Le théorème de Fubini qui permet de calculer des intégrales doubles (et triples)
- Le théorème de Green-Riemann qui permet de transformer une intégrale double en intégrale curviligne (et réciproquement)

Toutes les remarques sur ce polycopié sont les bienvenues et peuvent être adressées à l'adresse électronique précisée sur la page de garde. En vous souhaitant une bonne immersion dans le monde des intégrales.

Y. P.



# Chapitre 0

## Notions et outils de base

On rappelle dans ce chapitre quelques notions sur les fonctions d'une variable qui seront étendues à la dimension 2 dans les chapitres suivants. On présente également la méthodologie générale pour l'étude des courbes paramétrées qui seront le support des intégrales curvilignes étudiées au chapitre 3.

### 0.1 Fonctions d'une variable

#### Définition 0.1

Une **fonction** définie sur un domaine  $I \subset \mathbb{R}$  et à valeurs dans un domaine  $J \subset \mathbb{R}$  est une application qui à tout élément  $x \in I$  associe un élément  $y = f(x) \in J$ . On note

$$f : \begin{cases} I \longrightarrow J, \\ x \longmapsto f(x). \end{cases}$$

Pour  $x_0 \in I$ , on note  $y_0 = f(x_0)$ . On dit alors que  $y_0$  est l'**image** (unique) de  $x_0$  par la fonction  $f$  et que  $x_0$  est un **antécédent** (non nécessairement unique) de  $y_0$  par la fonction  $f$ . Plus généralement, l'ensemble  $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}$  est appelé **image de  $I$  par  $f$** .

Lorsque  $I$  est le domaine maximal sur lequel la fonction  $f$  existe (i.e. l'ensemble des réels  $x$  tels que  $f(x)$  a un sens), on l'appelle **ensemble de définition de  $f$** , souvent noté  $\mathcal{D}_f$  dans la littérature.

**Exemple :** Si  $t$  représente le temps qui passe, on peut définir la fonction  $N$  qui indique le nombre d'habitants  $N(t)$  sur Terre à l'instant  $t$ . Ainsi,  $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ .

L'objectif de l'analyse fonctionnelle est de pouvoir fournir des informations qualitatives sur les fonctions sans devoir calculer ses valeurs en tout point de son ensemble de définition. On s'intéressera en particulier dans la suite au sens de variation des fonctions ou encore à leur comportement aux bornes de leur ensemble de définition. On reliera ces propriétés à des aspects géométriques (voir Figure 1).

#### Définition 0.2

Soit  $f : I \rightarrow J$  une fonction. On appelle **graphe de la fonction  $f$**  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  l'ensemble des points de coordonnées  $(x, f(x))$  pour  $x \in I$ .

Les fonctions les plus simples à manipuler sont les fonctions polynomiales, i.e. de la forme

$$P : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^n p_k x^k, \end{cases}$$

pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  et des coefficients  $(p_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

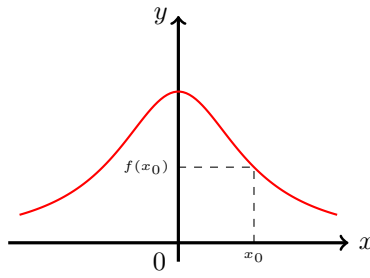


FIGURE 1 – Graphe de la fonction  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Cette famille inclut :

- les fonctions constantes ( $n = 0$ ) dont le graphe est une droite horizontale,
- les fonctions linéaires ( $n = 1$  et  $p_0 = 0$ ) dont le graphe est une droite passant par l'origine,
- les fonctions affines ( $n = 1$ ) dont le graphe est une droite,
- les fonctions quadratiques ( $n = 2$ ) dont le graphe est une parabole.

**Exemple:** Si la plupart des fonctions usuelles sont définies sur  $\mathbb{R}$ , il existe des fonctions dont l'ensemble de définition est réduit. Par exemple,  $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\cdot^{-1} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ .

### 0.1.1 Limites et continuité

Dans toute la suite, on considère une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ .

**Notation:** Pour un ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\overline{E}$  désigne l'adhérence de  $E$ , i.e. l'ensemble des limites des suites d'éléments de  $E$ . Typiquement,  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  et  $\overline{[a, b[} = [a, b]$ . Cette notion de topologie est reliée aux concepts d'ensembles ouverts et fermés :

- Un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est ouvert si pour tout  $x_0 \in I$ , il existe un voisinage  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  inclus dans  $I$  pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit. L'intervalle  $]0, 1[$  est donc un ouvert.
- Un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est fermé si son complémentaire  $\mathbb{R} \setminus I$  est ouvert.

Ainsi, si  $E$  est ouvert,  $\overline{E}$  est fermé.

On introduit la notion de limite afin d'étudier la continuité des fonctions.

#### Définition 0.3

Une fonction  $f$  admet pour limite  $\ell \in \mathbb{R}$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0 \in \overline{I}$  lorsque dans tout voisinage de  $\ell$ , on trouve une infinité d'images par la fonction  $f$  d'éléments voisins de  $x_0$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  ou encore  $\lim_{x_0} f = \ell$ .

#### Définition 0.4

Une fonction est dite **continue** en  $x_0 \in I$  si la limite de  $f$  en  $x_0$  est  $f(x_0)$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

#### Proposition 0.1

La fonction  $f$  est continue en  $x_0 \in I$  si et seulement si, pour toute suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $x_0$ , la suite  $(f(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $f(x_0)$ .

**Exemple:** Si la fonction *valeur absolue* est continue sur  $\mathbb{R}$ , en revanche la fonction *partie entière* est discontinue en chaque  $x_0 \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 0.2**

Toute somme et tout produit de fonctions continues sont également continus. Il en est de même au voisinage de  $x_0$  pour un quotient de fonctions continues à condition que la fonction au dénominateur ne s'annule pas en  $x_0$ .

**Définition 0.5**

Pour  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(I) \subset J$ , on définit la **fonction composée**  $g \circ f$  par :

$$\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto g(f(x)). \end{cases}$$

**Proposition 0.3**

Si  $f$  est continue sur  $I$  et  $g$  est continue sur  $J$  avec  $f(I) \subset J$ , alors la fonction  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

**Exemple :** Prenons  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$  et  $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln x$ . Alors  $g \circ f(x) = \ln(x^2)$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^*$  alors que  $f \circ g(x) = (\ln x)^2$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

La composition des fonctions est une notion utile en particulier pour décomposer une fonction à étudier en fonctions de base plus simples à analyser.

**0.1.2 Dérivabilité**

On introduit ensemble le concept de dérivation des fonctions d'une variable dans le but de déterminer le sens de variation de la fonction étudiée.

**Définition 0.6**

Une fonction  $f$  est **dérivable** en  $x_0 \in I$  si la fonction

$$\varphi_{x_0} : h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque  $h$  tend vers 0 (limite identique pour  $h \rightarrow 0_+$  et  $h \rightarrow 0_-$ ).

Lorsque  $f$  est dérivable en tout point  $x_0 \in I$ , on dit que  $f$  est dérivable sur  $I$ . Dans ce cas, la fonction

$$x_0 \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_{x_0}(h)$$

est appelée **fonction dérivée de  $f$**  et est notée  $f'$ .

Cette définition permet de traiter des cas particuliers. Dans le cas général, on ne détermine pas les fonctions dérivées par ce biais mais à l'aide de formules qui donnent explicitement les expressions des dérivées.

**Exemple :** La dérivée de la fonction  $x \mapsto \ln x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

On a de plus les résultats suivants pour déterminer les dérivées de sommes, produits, composées, ... de fonctions usuelles.

**Proposition 0.4**

Toute somme et tout produit de fonctions dérivables en  $x_0$  sont dérivables en  $x_0$ . Il en est de même pour un quotient de fonctions dérivables à condition que la fonction au dénominateur ne s'annule pas en  $x_0$ .

**Proposition 0.5**

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en  $x_0$  avec  $f(I) \subset J$  et si  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$ , alors la fonction  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  avec

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times (g' \circ f)(x_0).$$

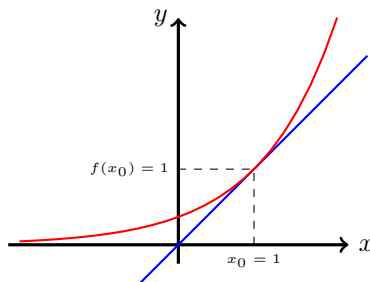


FIGURE 2 – Tangente (en bleu) en  $x_0 = 1$  au graphe (en rouge) de la fonction  $f(x) = e^{x-1}$

En dimension 1, on peut relier la notion de dérivabilité à celle de continuité :

**Théorème 0.1**

*Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors elle est continue en  $x_0$ .*

On définit ensuite par récurrence les dérivées  $n$ -ièmes d’une fonction.

**Définition 0.7**

*Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admettant des dérivées  $f^{(1)} = f', \dots, f^{(n-1)}$  jusqu’à l’ordre  $n - 1$  sur  $I$ . Si  $f^{(n-1)}$  est également dérivable sur  $I$ , alors sa fonction dérivée est appelée dérivée  $n$ -ième de  $f$  et notée  $f^{(n)}$ . Par la suite, on notera  $\mathcal{C}^n(I)$  l’ensemble des fonctions réelles admettant des dérivées continues sur  $I$  jusqu’à l’ordre  $n$ .*

**0.1.3 Tangentes et développements limités**

On peut alors aller plus loin dans la caractérisation des fonctions et dans l’étude de leur comportement.

**Proposition 0.6**

*Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors il existe une fonction  $\varphi$  nulle en  $x_0$  telle que*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$$

*au voisinage de  $x_0$ .*

En particulier, cela donne l’équation de la tangente sur laquelle le graphe de la fonction  $f$  repose au voisinage de  $x_0$  :

$$y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0).$$

Voir la figure 2 pour un exemple.

Pour connaître le mieux possible le comportement d’une fonction au voisinage d’un point, on utilise des fonctions polynomiales qui approchent cette fonction : on parle de **développement limité**. On a principalement les deux résultats suivants qui dépendent de la régularité de la fonction :

**Proposition 0.7 (Taylor avec reste intégral)**

*Soient  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$  et  $a \in I$ . Alors pour tout  $x \in I$  dans le voisinage de  $a$ , on a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x - a)^k}{k!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt.$$

**Proposition 0.8 (Taylor-Young)**

*Soient  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  et  $a \in I$ . Alors pour tout  $x \in I$  dans le voisinage de  $a$ , on a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x - a)^k}{k!} + (x - a)^n \varphi(x)$$

*où  $\varphi$  tend vers 0 en  $x = a$ .*

Cette proposition généralise la proposition 0.6.

**Exemple :** Au voisinage de  $x = 0$ , la fonction cosinus (qui est de classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ) peut être approchée par les polynômes  $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ ,  $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ , ...

### 0.1.4 Bijectivité et application réciproque

#### Définition 0.8

Une fonction  $f : I \rightarrow J$  est dite :

- **injective** sur  $I$  si tout élément de  $f(I)$  admet un unique antécédent :  $f(x) = f(y) \implies x = y$  ;
- **surjective** dans  $J$  si tout élément de  $J$  admet au moins un antécédent :  $\forall y \in J, \exists x \in I, f(x) = y$  ;
- **bijective** de  $I$  dans  $J = f(I)$  si  $f$  est injective sur  $I$  et surjective dans  $J$  :  $\forall y \in J, \exists! x \in I, f(x) = y$  ;

#### Proposition 0.9

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ . Si  $f'$  garde un signe constant strictement, alors la fonction  $f$  est strictement monotone et bijective.

#### Définition 0.9

Soit  $f$  une fonction bijective de  $I$  dans  $J$ . Il existe alors une unique fonction  $f^{-1} : J \rightarrow I$ , appelée **fonction réciproque** de  $f$ , telle que :

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Le graphe de la fonction  $f^{-1}$  est le symétrique du graphe de la fonction  $f$  par rapport à la droite  $y = x$ .

#### Proposition 0.10

Sous les hypothèses de la définition précédente, on a :

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}$$

où la fonction identité est définie par  $\text{Id}(x) = x$ .

**Exemple :** La fonction réciproque du logarithme népérien  $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{cases}$  est la fonction exponentielle  $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ .

#### Proposition 0.11

Soit  $f$  une fonction bijective et dérivable sur  $I$ . Alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $I$  avec

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

### 0.1.5 Intégration

On se limite dans la suite à la notion d'intégrales définies sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$ .  $f$  désigne alors une fonction continue sur  $[a, b]$ .

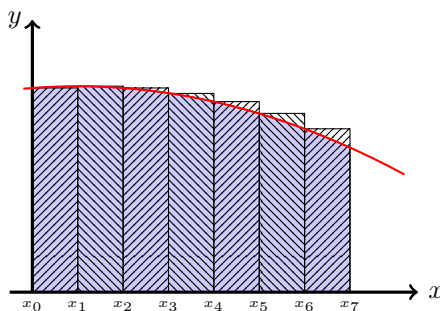


FIGURE 3 – Approximation de l’intégrale d’une fonction

**Définition 0.10**

On appelle **subdivision régulière** d’ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  de l’intervalle  $[a, b]$  la famille finie  $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$  avec  $x_j = a + j \frac{b-a}{n}$ .

**Définition 0.11**

La **somme de Riemann** à gauche (resp. à droite) de  $f$  relative à la subdivision  $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$  est :

$$\mathcal{R}_n^g(f) = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) f(x_j) \quad \left( \text{resp. } \mathcal{R}_n^d(f) = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) f(x_{j+1}) \right).$$

**Définition 0.12**

La fonction  $f$  est dite **intégrable sur**  $[a, b]$  si les suites  $\mathcal{R}_n^g(f)$  et  $\mathcal{R}_n^d(f)$  convergent vers la même limite. Le cas échéant, cette limite est appelée **intégrale de  $f$  sur**  $[a, b]$  et notée

$$\int_a^b f(x) dx \quad \left( \text{ou simplement } \int_a^b f \text{ en l’absence de confusion possible} \right).$$

**Remarque:** On s’est limité dans cette présentation au cas des subdivisions régulières et avec des noeuds correspondant à des points de la subdivision ( $x_j$  pour la somme à gauche,  $x_{j+1}$  pour la somme à droite). De manière générale, une subdivision de  $[a, b]$  est une suite strictement croissante  $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$  incluse dans  $[a, b]$  et on introduit une suite de noeuds  $(\xi_j)_{0 \leq j \leq n-1}$  tels que  $x_j \leq \xi_j \leq x_{j+1}$ . La somme de Riemann associée est alors

$$\mathcal{R}_n(f) = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) f(\xi_j).$$

Le pas de la subdivision est  $\delta = \max_j |x_{j+1} - x_j|$ . Lorsque  $f$  est intégrable, la somme de Riemann converge vers l’intégrale de  $f$  lorsque  $\delta$  tend vers 0.

L’outil *intégrale* ainsi construit présente un certain nombre de propriétés remarquables, héritées de l’outil *somme* impliqué dans la définition :

**Proposition 0.12**

L’application  $f \mapsto \int_a^b f$  est croissante et linéaire :

- Si  $f$  et  $g$  sont intégrables sur  $[a, b]$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f + \lambda g$  est intégrable sur  $[a, b]$  avec

$$\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g;$$

- Si  $f \leq g$ , alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ . En particulier, l’intégrale d’une fonction positive est positive.



**Proposition 0.13 (Relation de Chasles)**

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ . Pour tout point  $c \in [a, b]$ , on a :  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

En pratique, on ne détermine pas l'intégrabilité d'une fonction à l'aide des sommes de Riemann mais grâce à des critères tels que la proposition 0.14. Les sommes de Riemann peuvent toutefois être utiles pour approcher la valeur d'une intégrale lorsque celle-ci ne peut être déduite des méthodes classiques. En effet, comme on le voit sur la figure 3, le terme  $(x_{j+1} - x_j)f(x_j)$  dans la définition de l'intégrale représente l'aire d'un rectangle hachuré. Ainsi, plus  $n$  est grand, plus la subdivision est fine (son pas  $x_{j+1} - x_j$  est petit), plus la somme des aires des rectangles se rapproche de l'aire comprise sous la courbe. On peut donc interpréter l'intégrale du point de vue géométrique, ce qui est l'un des objectifs de ce cours :

**Théorème 0.2**

Si  $f$  est une fonction positive et intégrable sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b f$  représente l'aire contenue entre les droites d'équation  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $x = b$  et le graphe de  $f$ .

On prendra garde au fait que l'aire doit être prise au sens algébrique : si la fonction  $f$  intégrée est négative, l'intégrale est également négative et est égale à la surface du domaine entre l'axe des abscisses et la courbe prise négativement. Lorsque la fonction change de signe, on découpe l'intégrale par la relation de Chasles selon les domaines de signe constant.

**Proposition 0.14**

Toute fonction continue sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

**Remarque :** L'énoncé de la proposition précédente est faux si on considère l'intervalle ouvert  $]a, b[$ . Par exemple, la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0, 1]$  et est intégrable sur  $[0, 1]$ . En revanche, la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $]0, 1]$  mais n'y est pas intégrable.

Concrètement, pour calculer une intégrale, on peut ainsi soit évaluer l'aire correspondante dans des cas simples (fonctions affines), soit utiliser les deux théorèmes suivants.

**Théorème 0.3 (fondamental de l'analyse)**

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ . On a :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où  $F$  est une primitive de  $f$ , i.e. une fonction dérivable sur  $[a, b]$  vérifiant  $F' = f$ .

On en déduit l'identité suivante (**intégration par parties**) valable pour  $f$  et  $g$  dérivables sur  $[a, b]$

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx. \quad (1)$$

**Théorème 0.4 (changement de variables)**

1. Soient  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable, de dérivée continue et  $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$  continue avec  $[A, B] = \varphi([a, b])$ . On a alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b (f \circ \varphi)(y)\varphi'(y) dy.$$

2. Soient  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement monotone, dérivable et de dérivée continue, et  $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$  continue avec  $A = \varphi(a)$  et  $B = \varphi(b)$ . On a alors

$$\int_A^B f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(A)}^{\varphi^{-1}(B)} (f \circ \varphi)(y)\varphi'(y) dy.$$

## 0.2 Éléments de géométrie

Pour pouvoir repérer des points les uns par rapport aux autres dans le plan ou l'espace, il faut munir l'espace soit d'une structure euclidienne (produit scalaire, norme) soit d'un système de coordonnées mobile.

### 0.2.1 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$

#### Systèmes de coordonnées

De manière classique, on considère un repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , où  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont deux vecteurs non nuls et non colinéaires, et  $O$  un point du plan.

Tout point  $M$  du plan peut alors être repéré de manière unique par ses coordonnées dans ce repère, *i.e.* le couple  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_e.$$

L'indice  $e$  rappelle que ce sont les coordonnées dans la base  $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Lorsque  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont deux vecteurs orthogonaux fixes (*i.e.*  $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = \pi/2$ ), on parle de **coordonnées cartésiennes**.

Si l'on prend deux points <sup>1</sup>  $A(a_1, a_2)_e$  et  $B(b_1, b_2)_e$  du plan, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}_e.$$

Ce repère est dit fixe car, quel que soit le point  $M$  considéré, le repère est le même. Il existe toutefois un autre repère très utilisé en mécanique : celui des **coordonnées polaires** (voir Fig. 4). Dans ce système, on commence par se donner un point  $O$  et un vecteur non nul  $\vec{e}_1$ . On note  $\vec{e}_2$  l'image de  $\vec{e}_1$  par la rotation d'angle  $\pi/2$ . Un point  $M(x_1, x_2)$  est alors repéré par sa distance  $r \geq 0$  par rapport à l'origine  $O$  et l'angle  $\theta \in [0, 2\pi[$  formé avec l'axe des abscisses  $(O, \vec{e}_1)$  :

$$\begin{cases} r = OM, \\ \theta = \widehat{(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})}, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = r \cos \theta, \\ x_2 = r \sin \theta. \end{cases} \quad (2)$$

On définit alors les vecteurs du repère mobile  $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$  et  $\vec{e}_\theta$  l'image de  $\vec{e}_r$  par la rotation d'angle  $\pi/2$  de sorte que  $M$  a pour coordonnées  $(r, 0)$  dans ce repère. Les formules de passage entre les repères  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  sont :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2, & \vec{e}_\theta &= -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2, \\ \vec{e}_1 &= \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta, & \vec{e}_2 &= \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Notons que l'on peut inverser la relation (2) :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}, \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \theta = 2 \arctan \left( \frac{x_2}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right). \end{cases}$$

#### Produit scalaire

On se donne un repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  avec  $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = \pi/2$ . On définit le **produit scalaire euclidien** des vecteurs  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  et  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  par :<sup>2</sup>

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Deux vecteurs tels que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  sont dits **orthogonaux**, *i.e.*  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \pi/2 \pmod{\pi}$ . Dans toute la suite, on notera :

$$\vec{u}^\perp = (-u_2, u_1)$$

de sorte que  $\vec{u} \cdot \vec{u}^\perp = 0$  et  $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}^\perp)} = \pi/2$ .

1. On note indifféremment dans la suite les coordonnées sous forme de ligne ou de colonne.

2. De manière intrinsèque, le produit scalaire est défini par  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u \times v \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$  où  $u$  et  $v$  sont les longueurs des supports des vecteurs.

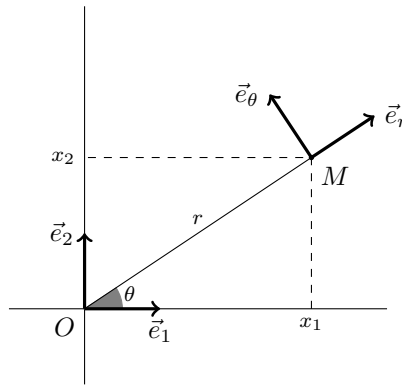


FIGURE 4 – Coordonnées polaires

Comme tous les produits scalaires, il vérifie les trois propriétés (pour  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) :

- symétrie :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  ;
- bilinéarité :  $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  ;
- positivité :  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $\vec{u} = \vec{0}$ .

Il en découle la définition de la **norme euclidienne** :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Cette norme vérifie l'*inégalité triangulaire*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

et l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

### **Théorème 0.5 (Pythagore)**

*Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs orthogonaux, alors :*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

On définit enfin le **déterminant** :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Cette appellation est consistante puisqu'il est égal au déterminant de la matrice dont les vecteurs colonnes sont  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Ainsi :

- **deux vecteurs tels que  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  sont colinéaires**, i.e. il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ .
- **De plus,  $|\det(\vec{u}, \vec{v})|$  est égal à l'aire du parallélogramme de côtés  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .**

A l'instar de la dimension 1, deux notions seront utiles dans la suite :

- Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est **ouvert** si pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ , il existe  $r > 0$  tel que  $\mathcal{B}_{\mathbf{x}}(r) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r\} \subset \Omega$ .
- Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est **fermé** si son complémentaire est un ouvert ; pour toute suite convergente d'éléments d'un fermé, la limite appartient à ce même fermé.

### 0.2.2 Géométrie dans $\mathbb{R}^3$

On généralise dans la suite les notions évoquées précédemment à la dimension 3.

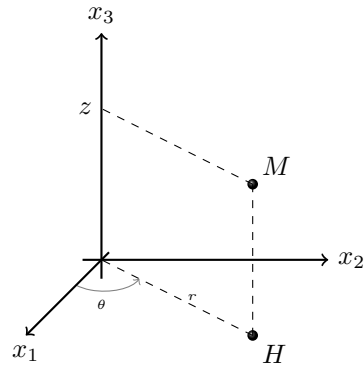


FIGURE 5 – Coordonnées cylindriques

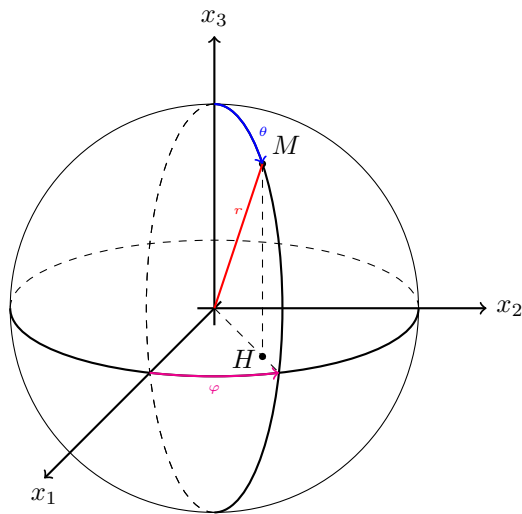


FIGURE 6 – Coordonnées sphériques

### Systèmes de coordonnées

Il existe trois systèmes principalement utilisés en dimension 3 :

- Les **coordonnées cartésiennes** dans le repère fixe  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  où les vecteurs  $\vec{e}_i$  de la base canonique sont orthogonaux 2 à 2.
- Les **coordonnées cylindriques**  $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$  : pour  $M(x_1, x_2, x_3)$ , on note  $H(x_1, x_2, 0)$  le projeté orthogonal de  $M$  dans le plan  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et

$$\begin{cases} r = OH, \\ \theta = (\vec{e}_3, \overrightarrow{OH}), \\ z = x_3, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = r \cos \theta, \\ x_2 = r \sin \theta, \\ x_3 = z. \end{cases} \quad (3)$$

- Les **coordonnées sphériques**  $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \pi[ \times [0, 2\pi[$  : pour  $M(x_1, x_2, x_3)$ , on note  $H(x_1, x_2, 0)$  le projeté orthogonal de  $M$  dans le plan  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et

$$\begin{cases} r = OM, \\ \theta = (\vec{e}_3, \overrightarrow{OM}), \\ \varphi = (\vec{e}_1, \overrightarrow{OH}), \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \sin \theta, \\ x_2 = r \sin \varphi \sin \theta, \\ x_3 = r \cos \theta. \end{cases} \quad (4)$$

## Produits scalaire et vectoriel

Le concept de produit scalaire dans la base canonique  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  s'étend directement en ajoutant une troisième composante :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3, \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},\end{aligned}$$

ces applications vérifiant les mêmes propriétés.

On définit ensuite le **produit vectoriel** par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Cette application vérifie les propriétés suivantes :

- antisymétrie :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ ;
- bilinéarité :  $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ ;

De la propriété d'antisymétrie, on déduit que  $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ . Réciproquement, si  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ , alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

Par ailleurs, on vérifie que  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ . De plus, la norme  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$  est égale à l'aire du parallélogramme formé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Enfin, le produit vectoriel permet d'étendre le déterminant en dimension 3 en posant :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}),$$

ce qui permet d'évaluer la coplanarité des vecteurs.  $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$  représente le volume du parallélépipède de côtés  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

## 0.3 Formules de trigonométrie

Les formules de trigonométrie usuelles sont largement utilisées dans le cadre de ce cours, en particulier pour les courbes paramétrées. Voici quelques rappels (pour  $a \in \mathbb{R}$ ) avec leur interprétation géométrique sur la figure 7, page 12.

Commençons tout d'abord par un tableau de valeurs :

$a$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$
$\cos a$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
$\sin a$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\tan a$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		0

Voici ensuite quelques formules utiles :

- ①  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$
- ②  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- ③  $\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
- ④  $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- ⑤  $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$  and  $\cos(3a) = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$
- ⑥  $\sin(2a) = 2 \cos a \sin a$  and  $\sin(3a) = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$
- ⑦  $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

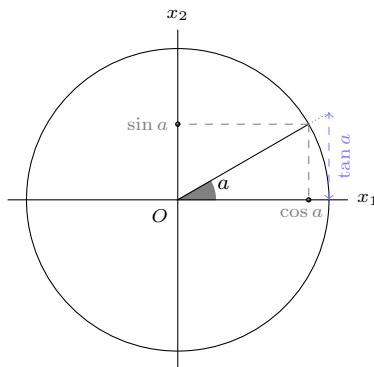


FIGURE 7 – Trigonométrie

La formule ① s’obtient en appliquant le théorème de Pythagore. Les deux formules suivantes (② et ③) se prouvent en passant en complexe :

$$\begin{aligned} \cos(a + b) + \imath \sin(a + b) &= e^{\imath(a+b)} = e^{\imath a} e^{\imath b} = (\cos a + \imath \sin a)(\cos b + \imath \sin b) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + \imath(\cos a \sin b + \cos b \sin a). \end{aligned}$$

On procède ensuite par identification des parties réelle et imaginaire. Pour des valeurs particulières, on déduit :

$$\begin{array}{lll} \cos(x + \pi) = -\cos x & \cos(\pi - x) = -\cos x & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \\ \sin(x + \pi) = -\sin x & \sin(\pi - x) = \sin x & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \end{array}$$

Pour ④, on rappelle que

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

Pour ⑤ à ⑦, on applique  $b = a$  aux formules précédentes.

D’un point de vue fonctionnel, on rappelle que :

- La fonction  $\cos$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique, paire, de dérivée  $\cos' = -\sin$ . Elle définit une bijection de  $[0, \pi]$  dans  $[-1, 1]$ , dont la réciproque, notée  $\arccos$ , admet pour dérivée :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- La fonction  $\sin$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique, impaire, de dérivée  $\sin' = \cos$ . Elle définit une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  dans  $[-1, 1]$ , dont la réciproque, notée  $\arcsin$ , admet pour dérivée :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- La fonction  $\tan$  est continue et dérivable sur tout intervalle de  $\mathbb{R}$  ne contenant pas de multiple de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ -périodique, impaire, de dérivée

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x.$$

Elle définit une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  dans  $\mathbb{R}$ , dont la réciproque, notée  $\arctan$ , admet pour dérivée :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

# Chapitre 1

## Courbes planes paramétrées

Dans ce chapitre, on introduit la notion de courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes qui sera utile pour définir les intégrales curvilignes dans le chapitre 3. Comme on le verra par la suite, les courbes paramétrées permettent de traiter des cas plus généraux que le simple cas des courbes représentatives de fonctions d'une variable.

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . Les coordonnées cartésiennes sont notées  $(x_1, x_2)$ .

### 1.1 Introduction

#### 1.1.1 Notion de courbes paramétrées

##### Définition 1.1

Une **courbe paramétrée**  $(I, \mathbf{M})$  du plan est un ensemble de points  $\mathbf{M}(t) = (X_1(t), X_2(t))$  où  $X_1, X_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions continues sur l'intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . La courbe est parcourue dans le sens des  $t$  croissants.  $t$  est appelé le paramètre.

On verra dans la suite comment tracer des courbes paramétrées de manière méthodique en étudiant les deux fonctions  $X_1$  et  $X_2$ .

**Folium de Descartes :** On considère la courbe paramétrée  $\mathcal{C}$  définie par

$$X_1(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad X_2(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad t \in [0, +\infty[$$

qui correspond à la figure ci-dessous.

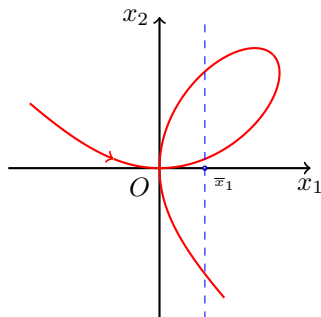


FIGURE 1.1 – Ébauche de la courbe de  $\mathcal{C}$

On voit en particulier que cette courbe ne peut pas être représentative d'une fonction d'une variable puisque la courbe coupe plusieurs fois la droite d'équation  $x_1 = \bar{x}_1$  qui aurait alors plusieurs images!

Une des difficultés conceptuelles est que le paramètre  $t$  des courbes est muet : il n'apparaît pas sur le graphe (contrairement aux coordonnées qui sont visibles sur les axes) et n'est pas unique. On peut le comprendre lorsqu'on trace la trajectoire d'une particule dans un domaine fluide au cours du temps : le paramètre est le temps  $t$  mais on ne peut le représenter sur la figure, on n'y observe que les 3 coordonnées spatiales de la particule.

Il faudra veiller à ne pas confondre l'objet géométrique qu'est le support de la courbe (qu'on appelle parfois "trajectoire" pour faire le parallèle avec le mouvement d'une particule) et la courbe en elle-même qui est une application. De manière analogue, pour un arc  $\mathcal{C} = \mathbf{M}(I)$ , on distinguera les **propriétés géométriques** (longueur, courbure, ...) qui sont indépendantes du paramétrage, des **propriétés cinématiques** (vitesse, accélération, ...) qui décrivent la manière dont l'arc est parcouru.

Un même arc peut donc être le support de courbes paramétrées distinctes. On introduit la notion de **paramétrages équivalents**.<sup>1</sup> On dit que  $\mathbf{M} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\mathbf{N} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont deux paramétrages équivalents d'un même arc  $\mathcal{C}$  s'il existe une fonction  $\phi : J \rightarrow I$  de classe  $\mathcal{C}^1$  bijective telle que  $\mathbf{N}(s) = \mathbf{M}(\phi(s))$ . Le sens de parcours peut toutefois être différent si  $\phi' < 0$ .

### 1.1.2 Exemples classiques

On présente ici quelques exemples concrets de courbes usuelles.

**Courbes représentatives de fonctions d'une variable.** Parmi toutes les courbes imaginables, il y a une catégorie déjà manipulée précédemment : les **graphes** des fonctions d'une variable. Si on considère la fonction  $f : x \mapsto f(x)$  définie sur son ensemble de définition  $I \subset \mathbb{R}$ , alors le graphe de  $f$  peut être paramétré par :

$$X_1(t) = t, \quad X_2(t) = f(t), \quad t \in I.$$

On verra dans le chapitre suivant (théorème 2.3) que toutes les courbes paramétrées peuvent être représentées **localement** comme le graphe d'une fonction, à l'exception des points où la tangente à la courbe est verticale.

**Exemple :** On reprend le cas de la figure 1, p. 2. La courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  définie sur  $\mathbb{R}$  correspond à la courbe paramétrée  $X_1(t) = t, X_2(t) = f(t), t \in \mathbb{R}$  :

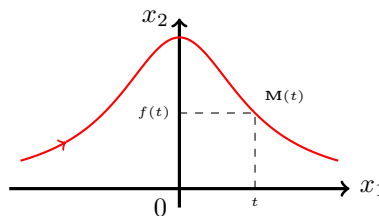


FIGURE 1.2 – Graphe d'une fonction d'une variable

**Droites.** Lorsque les fonctions  $X_1$  et  $X_2$  sont affines par rapport au paramètre, alors la courbe décrite est une **droite** (ou une portion de droite) : le support de la courbe paramétrée

$$X_1(t) = \alpha t + \beta, \quad X_2(t) = \gamma t + \delta, \quad t \in \mathbb{R},$$

où  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ .

Plus précisément, la courbe décrite par  $\mathbf{M}(t)$  est :

- le point  $(\beta, \delta)$  si  $\alpha = \gamma = 0$ ;
- la droite verticale d'équation  $x_1 = \beta$  si  $\alpha = 0$  et  $\gamma \neq 0$ ;
- la droite horizontale d'équation  $x_2 = \delta$  si  $\alpha \neq 0$  et  $\gamma = 0$ ;
- la droite d'équation  $x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}x_1 + \delta - \frac{\gamma\beta}{\alpha}$  sinon.<sup>2</sup>

1. Ceci définit une classe d'équivalence. On confondra par la suite la courbe paramétrée  $(I, \mathbf{M})$  avec sa classe d'équivalence.

2. Pour trouver cette expression, on exprime  $t$  en fonction de  $X_1(t)$  puis on injecte cette expression dans celle de  $X_2(t)$ .



Si  $t$  ne décrit pas  $\mathbb{R}$  mais un intervalle borné  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , la courbe se réduit alors à un segment dont les extrémités sont  $\mathbf{M}(a)$  et  $\mathbf{M}(b)$ . Réciproquement, pour paramétrer le segment reliant  $A$  à  $B$ , on pose  $\mathbf{M}(t) = tA + (1 - t)B$  pour  $t \in [0, 1]$ , ce qui correspond au barycentre des deux points.

**Exemple :** La droite d'équation cartésienne  $x_2 = 2x_1 - 1$  correspond aux paramétrisations équivalentes

$$\begin{cases} X_1(t) = t \\ X_2(t) = 2t - 1 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{X}_1(s) = \frac{s+1}{2} \\ \hat{X}_2(s) = s \\ s \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Par ailleurs, considérons le **triangle** reliant les points  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$  et  $B(1, 1)$  dans un repère cartésien. Le principal point est de construire un paramétrage par morceaux qui parcourt le triangle dans le même sens :

$$OA : \begin{cases} X_1^{OA}(t) = t, \\ X_2^{OA}(t) = 0, \\ t \in [0, 1], \end{cases} \quad AB : \begin{cases} X_1^{AB}(t) = 1, \\ X_2^{AB}(t) = t, \\ t \in [0, 1], \end{cases} \quad BO : \begin{cases} X_1^{BO}(t) = 1 - t, \\ X_2^{BO}(t) = 1 - t, \\ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

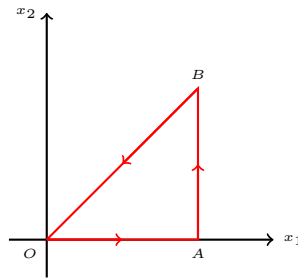


FIGURE 1.3 – Paramétrisation d'un triangle

### ⚠ Erreurs courantes

Quand on paramètre un arc par morceaux, il n'est pas nécessaire que le paramètre de chaque morceau ait la même notation, ni ne vive dans le même domaine ni dans des domaines contigus. Le seul critère à retenir est que l'orientation des morceaux doit aller dans le même sens (idéalement dans le sens direct dans le cas des courbes fermées, voir Déf. 1.3).

**Cercles.** Un **cercle** de centre  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  et de rayon  $R$  (Fig. 1.4a) peut être paramétré par :

$$X_1(t) = \bar{x}_1 + R \cos t, \quad X_2(t) = \bar{x}_2 + R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi[.$$

On vérifie en effet que  $\sqrt{(X_1(t) - \bar{x}_1)^2 + (X_2(t) - \bar{x}_2)^2} = R$ . Si l'on restreint l'intervalle d'étude à  $[0, \pi]$ , la courbe décrite est le demi-cercle supérieur. Plus généralement, l'ellipse de centre  $O$  et de demi-axes  $a$  et  $b$  (Fig. 1.4b) peut être paramétrée par :

$$X_1(t) = a \cos t, \quad X_2(t) = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi[.$$

Par ailleurs, le demi-cercle supérieur de centre  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  et de rayon  $R$  peut aussi être décrit par :

$$\hat{X}_1(t) = t, \quad \hat{X}_2(t) = \bar{x}_2 + \sqrt{R^2 - (t - \bar{x}_1)^2}, \quad t \in [\bar{x}_1 - R, \bar{x}_1 + R].$$

On remarque toutefois que le demi-cercle n'est pas parcouru dans le même sens qu'avec le paramétrage trigonométrique ci-dessus. En effet, dans le sens des  $t$  croissants, ce paramétrage va de  $\widehat{\mathbf{M}}(\bar{x}_1 - R) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - R \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$  vers  $\widehat{\mathbf{M}}(\bar{x}_1 + R) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 + R \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$  alors que le paramétrage trigonométrique va de  $\mathbf{M}(0) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 + R \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$  vers  $\mathbf{M}(2\pi) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - R \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ .

## 1.2 Cadre général

Dans la suite, on suppose que les fonctions  $X_1$  et  $X_2$  admettent des dérivées continues sur l'intervalle  $I$ .

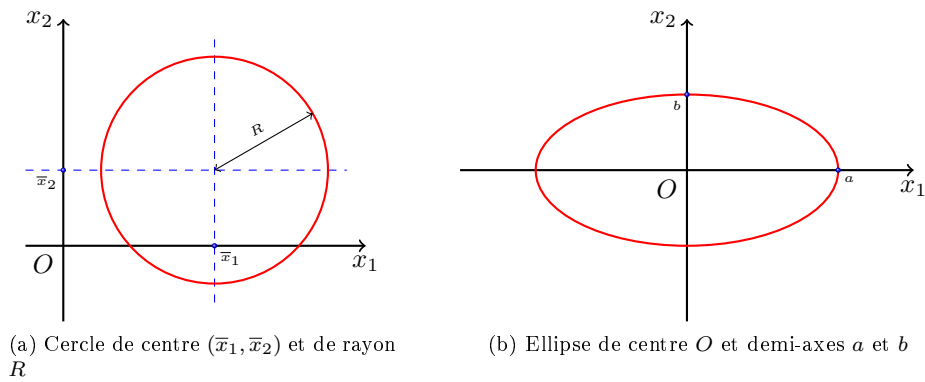


FIGURE 1.4 – Paramétrage des ellipses

### 1.2.1 Symétries

Il arrive parfois que la courbe possède des symétries. Dans ce cas, il est possible de restreindre l'intervalle d'étude de la courbe paramétrée et de déduire le reste de la courbe par des opérations géométriques simples.

- **Périodicité** : s'il existe  $T > 0$  tel que  $\mathbf{M}(t+T) = \mathbf{M}(t)$ , cela signifie que l'on peut étudier la courbe uniquement sur un intervalle de longueur  $T$  et non plus sur tout  $I$ . La courbe est ainsi parcourue plusieurs fois lorsque  $t$  parcourt  $I$  et le tracé obtenu à partir d'un intervalle de longueur  $T$  suffit à décrire toute la courbe.
- **Symétrie d'axe ( $Ox_1$ )** : supposons qu'il  $\beta_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $X_1(\pm t + \beta_1) = X_1(t)$  et  $X_2(\pm t + \beta_1) = -X_2(t)$ . Cela signifie que  $\mathbf{M}(\pm t + \beta_1)$  se déduit de  $\mathbf{M}(t)$  par une symétrie d'axe ( $Ox_1$ ). On peut alors réduire l'intervalle d'étude de moitié.
- **Symétrie d'axe ( $Ox_2$ )** : supposons qu'il  $\beta_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $X_1(\pm t + \beta_2) = -X_1(t)$  et  $X_2(\pm t + \beta_2) = X_2(t)$ . Cela signifie que  $\mathbf{M}(\pm t + \beta_2)$  se déduit de  $\mathbf{M}(t)$  par une symétrie d'axe ( $Ox_2$ ). On peut alors réduire l'intervalle d'étude de moitié.
- **Symétrie de centre  $O$**  : supposons qu'il  $\beta_3 \in \mathbb{R}$  tel que  $X_1(\pm t + \beta_3) = -X_1(t)$  et  $X_2(\pm t + \beta_3) = -X_2(t)$ . Cela signifie que  $\mathbf{M}(\pm t + \beta_3)$  se déduit de  $\mathbf{M}(t)$  par une symétrie de centre  $O$ . On peut alors réduire l'intervalle d'étude de moitié.
- **Symétrie d'axe  $x_2 = x_1$**  : supposons qu'il  $\beta_4 \in \mathbb{R}$  tel que  $X_1(\pm t + \beta_4) = X_2(t)$  et  $X_2(\pm t + \beta_4) = X_1(t)$ . Cela signifie que  $\mathbf{M}(\pm t + \beta_4)$  se déduit de  $\mathbf{M}(t)$  par une symétrie par rapport à la droite d'équation  $x_2 = x_1$ . On peut alors réduire l'intervalle d'étude de moitié.

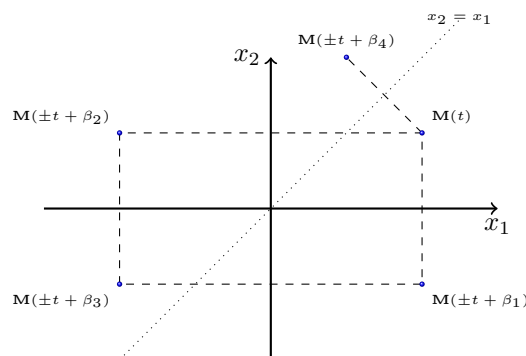


FIGURE 1.5 – Symétries d'une courbe paramétrée

De manière générale, s'il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  et une application  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (translation, rotation) telles que  $\mathbf{M}(f(t)) = \mathcal{A}(\mathbf{M}(t))$ , alors cela signifie que la courbe présente une symétrie. On peut donc réduire le domaine d'étude en conséquence.

### 1.2.2 Variations et tangentes

On donne tout d'abord quelques définitions et propriétés des courbes paramétrées qui peuvent aider à les tracer.

#### Définition 1.2

Le point  $\mathbf{M}(t_0)$  est dit **singulier** (ou stationnaire) si  $X_1'(t_0) = X_2'(t_0) = 0$ . Autrement, il est dit **régulier** (ou ordinaire).

#### Proposition 1.1

Soit  $\mathbf{M}(t_0)$  un point régulier de la courbe  $\mathcal{C} = (I, \mathbf{M})$ . Un vecteur tangent à la courbe  $\mathcal{C}$  paramétrée par  $t \in I \mapsto \mathbf{M}(t)$  en  $\mathbf{M}(t_0)$  est  $\mathbf{M}'(t_0)$ . Une équation paramétrique de la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{M}(t_0)$  est donc :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_1(s) = X_1(t_0) + sX_1'(t_0), \\ \mathcal{X}_2(s) = X_2(t_0) + sX_2'(t_0), \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

**Démonstration :** Un point  $\mathbf{N}$  est sur la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{M}(t_0)$  ssi le vecteur  $\overrightarrow{\mathbf{M}(t_0)\mathbf{N}}$  est colinéaire au vecteur  $\mathbf{M}'(t_0)$ , ce qui se traduit par l'existence d'un nombre  $s \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{\mathbf{M}(t_0)\mathbf{N}} = s\mathbf{M}'(t_0)$ . ■

Par analogie avec la cinématique, le vecteur  $\mathbf{M}'(t)$  est aussi appelé vecteur vitesse. Si le paramétrage  $\mathbf{M}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , le vecteur  $\mathbf{M}''(t)$  est le vecteur accélération.

**Remarque :** De cette équation paramétrique, on peut déduire l'équation cartésienne de la tangente. On particulier, on en déduit que la pente de la tangente à la courbe en  $\mathbf{M}(t_0)$  est  $\frac{X_2'(t_0)}{X_1'(t_0)}$ . Étudier le signe de cette quantité aide à tracer la courbe en connaissant ses tangentes.

Par exemple, lorsque  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{X_2'(t)}{X_1'(t)} = \infty$ , cela signifie que la tangente est verticale en  $\mathbf{M}(t_0)$ .

**Exemple :** Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est le graphe d'une fonction d'une variable, *i.e.* pour  $X_1(t) = t$ ,  $X_2(t) = f(t)$ ,  $t \in I = \mathcal{D}_f$ , un vecteur tangent à  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{M}(t_0)$  est donc donné par :

$$\mathbf{T}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t_0) \end{pmatrix}.$$

À noter que si le point  $\mathbf{M}(t_0)$  est singulier, on peut étudier la tangente en déterminant la limite (si elle existe)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{X_2(t) - X_2(t_0)}{X_1(t) - X_1(t_0)}.$$

Cette limite donne alors le coefficient directeur de la tangente passant par  $\mathbf{M}(t_0)$ . En particulier, si la limite vaut  $\pm\infty$ , cela signifie que la tangente est verticale.

Enfin, on conclut ce paragraphe en introduisant une notion dans le cadre des courbes **fermées** :

#### Définition 1.3

Lorsque la courbe  $\mathcal{C}$  est fermée, on dit que le paramétrage  $t \in I \mapsto \mathbf{M}(t)$  est **orienté dans le sens direct** si  $\mathcal{C}$  est parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Cela signifie que pour tout  $t \in I$ , le vecteur  $\mathbf{M}'(t_0)^\perp$  est orienté vers l'intérieur du domaine.

**Remarque :** Concrètement, cela veut dire que si l'on marche sur la frontière dans le sens des  $t$  croissants, le domaine se trouve sur la gauche.

### 1.2.3 Comportement au voisinage de points particuliers

Pour tracer une courbe, il peut être utile d'étudier le comportement du paramétrage au voisinage de points singuliers et aux bornes de son domaine de définition.

Pour étudier le comportement d'une courbe par rapport à sa tangente en  $\mathbf{M}(t_0)$ , on cherche à déterminer les entiers  $p < q$  minimaux et les vecteurs non nuls  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  tels que :

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(t_0) + (t - t_0)^p \mathbf{u} + (t - t_0)^q \mathbf{v} + (t - t_0)^q \boldsymbol{\varepsilon}(t),$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow t_0$ . En pratique, on effectue un développement de  $X_1$  et de  $X_2$  au voisinage de  $t_0$ .

Il y a quatre cas possibles, résumés sur la figure 1.6 :

- Si  $p$  est impair et  $q$  pair, alors c'est un **point ordinaire** ;
- Si  $p$  et  $q$  sont impairs, alors c'est un **point d'inflexion**, la courbe traverse la tangente ;
- Si  $p$  est pair et  $q$  impair, alors c'est un **point de rebroussement de première espèce**, la courbe repart en arrière en traversant la tangente ;
- Si  $p$  et  $q$  sont pairs, alors c'est un **point de rebroussement de seconde espèce**, la courbe repart en arrière sans traverser la tangente.

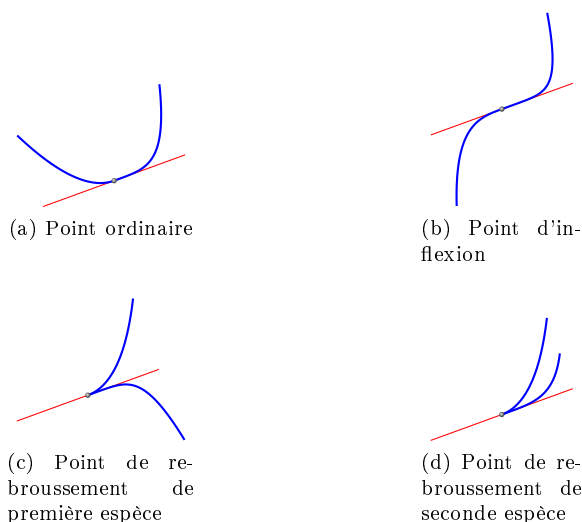


FIGURE 1.6 – Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Intéressons-nous ensuite au comportement de la courbe au voisinage de  $t_0$  lorsque  $t_0$  est une borne de l'intervalle d'étude  $I$ .

**Définition 1.4**

1. Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} X_1(t) = \infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} X_2(t) = \ell \in \mathbb{R}$ , alors la courbe admet une asymptote horizontale d'équation  $x_2 = \ell$ .
2. Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} X_2(t) = \infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} X_1(t) = \ell \in \mathbb{R}$ , alors la courbe admet une asymptote verticale d'équation  $x_1 = \ell$ .
3. Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} X_1(t) = \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} X_2(t) = \infty$  et si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{X_2(t)}{X_1(t)} = 0$ , on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction  $\mathbb{R}e_1$ .
4. Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} X_1(t) = \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} X_2(t) = \infty$  et si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{X_2(t)}{X_1(t)} = \infty$ , on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction  $\mathbb{R}e_2$ .
5. Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} X_1(t) = \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} X_2(t) = \infty$  et si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{X_2(t)}{X_1(t)} = \lambda \in \mathbb{R}$  avec  $\lim_{t \rightarrow t_0} X_2(t) - \lambda X_1(t) = \mu \in \mathbb{R}$ , on dit que la courbe admet pour asymptote la droite d'équation cartésienne  $x_2 = \lambda x_1 + \mu$ .

### 1.2.4 Longueur d'une courbe

Du point de vue métrique, il est possible d'évaluer la longueur d'une courbe paramétrée :

**Proposition 1.2**

La longueur d'un arc  $\mathcal{C}$  décrit par le paramétrage  $t \in I \mapsto \mathbf{M}(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_I \|\mathbf{M}'(t)\| \, dt.$$

En particulier, cette propriété est indépendante du paramétrage choisi. En effet, si l'on prend un paramétrage équivalent  $\mathbf{N}(s) = \mathbf{M}(\phi(s))$  pour  $\phi : J \rightarrow I$  bijective. Alors, par le changement de variables  $t = \phi(s)$  (voir Th. 0.4) :

$$\int_I \|\mathbf{M}'(t)\| \, dt = \int_J \|\mathbf{M}'(\phi(s))\| |\phi'(s)| \, ds = \int_J \|\mathbf{N}'(s)\| \, ds.$$

**Exemple :** La longueur de la courbe représentative de la fonction  $f$  sur le segment  $I \subset \mathcal{D}_f$  est donc  $\int_I \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$ .

Dans le cas où le paramétrage est régulier (*i.e.* lorsque tous les points sont réguliers), on peut utiliser un nouveau paramétrage, celui de l'abscisse curviligne.

**Définition 1.5**

On appelle **abscisse curviligne** d'origine  $t_0 \in I$  la fonction

$$\mathcal{S} : t \mapsto \int_{t_0}^t \|\mathbf{M}'(\tau)\| \, d\tau.$$

**Proposition 1.3**

Lorsque tous les points de la courbe sont réguliers, alors la fonction  $\mathcal{S}$  est inversible et la courbe peut être décrite par  $\mathbf{N}(s) = \mathbf{M}(\mathcal{S}^{-1}(s))$ . On a de plus  $\|\mathbf{N}'\| = 1$ , ce qui signifie que la courbe est parcourue à vitesse constante avec ce paramétrage.

### 1.2.5 Courbure

Supposons que la courbe  $\mathcal{C}$  soit décrite par le paramétrage régulier  $(I, \mathbf{M})$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On définit alors le rayon de courbure au point  $\mathbf{M}(t)$  par :

$$R(t) = \frac{\|\mathbf{M}'(t)\|^3}{\sqrt{\|\mathbf{M}'(t)\|^2 \|\mathbf{M}''(t)\|^2 - (\mathbf{M}'(t) \cdot \mathbf{M}''(t))^2}} = \frac{(X_1'(t)^2 + X_2'(t)^2)^{3/2}}{|X_1'(t)X_2''(t) - X_2'(t)X_1''(t)|}.$$

On note  $\boldsymbol{\tau}$  le vecteur tangent unitaire

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\mathbf{M}'(t)}{\|\mathbf{M}'(t)\|}$$

et  $\boldsymbol{\nu}$  le vecteur normal unitaire de sorte que  $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$  forme un repère orthonormal direct :

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \frac{\pm R(t)}{\|\mathbf{M}'(t)\|^2} \left( \mathbf{M}''(t) - \frac{\mathbf{M}'(t) \cdot \mathbf{M}''(t)}{\|\mathbf{M}'(t)\|^2} \mathbf{M}'(t) \right).$$

Enfin, on définit le centre de courbure par :

$$\Omega(t) = \mathbf{M}(t) + R(t)\boldsymbol{\nu}(t).$$

Le cercle de rayon  $\Omega(t)$  et de rayon  $R(t)$  est alors tangent à la courbe paramétrée en  $\mathbf{M}(t)$ .

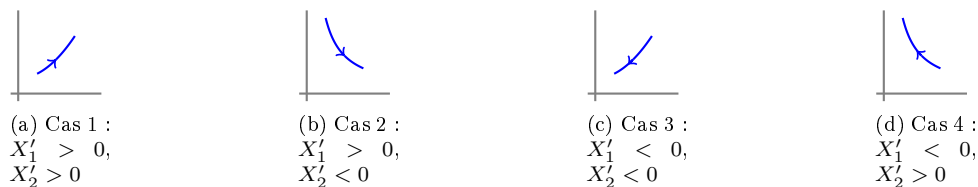


FIGURE 1.7 – Configurations de variations en fonction du signe des fonctions coordonnées

### 1.3 Méthodologie

Pour dessiner une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes, il faut étudier les fonctions  $X_1$  et  $X_2$  que l'on suppose dérivables sur  $I$ .

1. On commence par déterminer les symétries de la courbe en fonction de la parité/périodicité éventuelle de  $X_1$  et de  $X_2$ .
2. On recherche ensuite les éventuels points doubles (*i.e.* les points qui sont parcourus deux fois, en résolvant l'équation  $\mathbf{M}(t_1) = \mathbf{M}(t_2)$ ) ainsi que l'existence (et la nature le cas échéant) de points singuliers.
3. On évalue la présence d'asymptotes ou de branches paraboliques.
4. On étudie les sens de variation des fonctions  $X_1$  et  $X_2$  sur l'intervalle réduit ainsi que le signe de  $\frac{X_2'}{X_1'}$ .
5. On trace la courbe sur l'intervalle réduit puis on utilise les symétries.
6. On peut éventuellement étudier d'autres propriétés telles que la longueur de la courbe ou l'aire comprise à l'intérieur d'une courbe fermée.



#### Erreurs courantes

*Trop souvent, le tracé de la figure est déconnecté du tableau de variations. L'étape 4. de la méthodologie doit s'appuyer sur les trois points précédents. En particulier, pour tracer une courbe, il est bon de placer tout d'abord quelques points particuliers ainsi que les tangentes en ces points. On utilise ensuite le sens de variation des deux fonctions coordonnées.*

### 1.4 Exemple complet : l'astroïde

On considère la courbe  $\mathcal{C}$  paramétrée par

$$X_1(t) = \cos^3 t, \quad X_2(t) = \sin^3 t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**1. Étude des symétries.** On remarque d'emblée que les deux fonctions coordonnées sont  $2\pi$ -périodiques, ce qui permet de restreindre l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur  $2\pi$ , disons  $[-\pi, \pi]$ .

On remarque ensuite que  $X_1(-t) = X_1(t)$  et  $X_2(-t) = -X_2(t)$ . Cela justifie une symétrie d'axe ( $Ox_1$ ) de la courbe et une réduction de l'intervalle à  $[0, \pi]$ .

De même,  $X_1(\pi - t) = -X_1(t)$  et  $X_2(\pi - t) = X_2(t)$ . Cela justifie une symétrie d'axe ( $Ox_2$ ) de la courbe et une réduction de l'intervalle à  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Enfin,  $X_1(\frac{\pi}{2} - t) = X_2(t)$  et  $X_2(\frac{\pi}{2} - t) = X_1(t)$ . Cela justifie une symétrie par rapport à la droite  $x_2 = x_1$  de la courbe et une réduction de l'intervalle à  $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ .

**2. Points particuliers.** On note d'une part que sur  $I$ , il n'y a pas de points doubles :  $\mathbf{M}(t_1) = \mathbf{M}(t_2) \implies t_1 = t_2$ .<sup>3</sup> D'autre part, les deux fonctions coordonnées sont dérivables avec

$$\mathbf{M}'(t) = 3 \cos t \sin t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Sur l'intervalle  $I$ , il n'existe qu'un seul point singulier, à savoir  $t = 0$  pour lequel on a bien  $\mathbf{M}'(0) = \mathbf{0}$ .

Étudions la nature de ce point singulier. En effectuant un développement limité de  $X_1$  et de  $X_2$  au voisinage de  $t = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right)^3 = 1 - \frac{3t^2}{2} + o(t^3), \\ X_2(t) &= (t + o(t^2))^3 = t^3 + o(t^4). \end{aligned}$$

D'où, au voisinage de  $t = 0$  :

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(0) + t^2 \mathbf{u} + t^3 \mathbf{v} + o(t^3), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $\mathbf{M}(0)$  est un point de rebroussement de première espèce.

**3. Asymptotes et branches paraboliques.** Il n'y a ici aucune asymptote ni branche parabolique puisque l'intervalle d'étude est borné et fermé.

**4. Tableau de variations.** Sur  $I$ ,  $X'_1$  et  $X'_2$  ne changent pas de signe, avec  $X'_1(t) \leq 0$  et  $X'_2(t) \geq 0$ . De plus, on a :

$$\frac{X'_2(t)}{X'_1(t)} = -\tan t.$$

On voit donc que l'on aura une tangente horizontale en  $t = 0$  (l'axe des abscisses). Les tangentes ont de plus toutes un coefficient directeur négatif sur  $I$ . En  $t = \frac{\pi}{4}$ , la tangente a pour équation  $x_2 = -(x_1 - X_1(\frac{\pi}{4})) + X_2(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - x_1$ .

$t$	0	$\frac{\pi}{4}$
$X'_1(t)$	0	-
$X_1$	1	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$X_2$	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$X'_2(t)$	0	+
$\frac{X'_2(t)}{X'_1(t)}$	0	-

FIGURE 1.8 – Tableau de variations du paramétrage de l'astroïde

**5. Tracé.** En utilisant le tableau de variations, les tangentes ainsi que les symétries, on obtient la courbe de la figure 1.9.

3. Sur  $\mathbb{R}$ , chaque point est un point multiple puisque la courbe est parcourue périodiquement.

**6. Longueur.** On peut de plus calculer la longueur de l'astroïde. Pour tout  $t \in I$ ,  $\cos(t) \geq 0$  et  $\sin t \geq 0$ . D'où, on a :

$$\|\mathbf{M}'(t)\| = 3 \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3 \cos t \sin t = \frac{3}{2} \sin(2t).$$

Ainsi, la longueur de l'arche d'astroïde réduite à  $I$  est donnée par :

$$\mathcal{L}_I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \|\mathbf{M}'(t)\| dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t) dt = \frac{3}{4} [-\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}.$$

La longueur totale de la courbe vaut donc  $8\mathcal{L}_I = 6$  du fait des symétries.

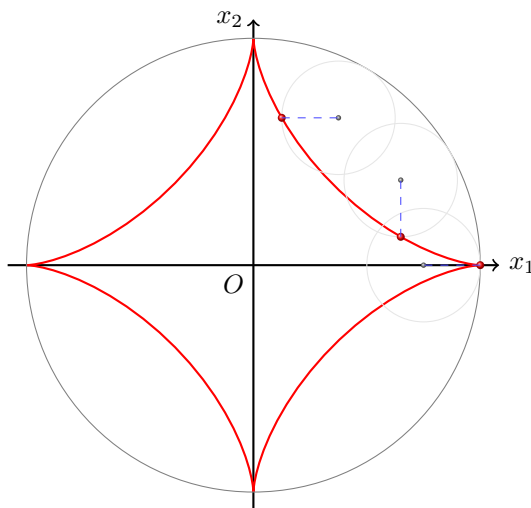


FIGURE 1.9 – Tracé de l'astroïde

**Contexte mécanique de l'astroïde.** Considérons une roue mobile de rayon  $R/4$  roulant de manière uniforme et sans glissement à l'intérieur d'un conduit circulaire fixe de rayon  $R$ . On s'intéresse à la trajectoire d'un point marqué sur la roue (point rouge sur la figure 1.9) au cours du temps, ce point étant initialement le point de contact entre la roue et le conduit.

En notant  $t$  l'angle parcouru par la roue (cf. figure 1.10), on note  $\mathbf{M}(t)$  la trajectoire de ce point "fixe" sur la roue (en rouge),  $\Omega(t)$  la trajectoire du centre de la roue (en orange) et  $\mathbf{S}(t)$  la trajectoire du point de contact (en bleu). On a donc  $t = \widehat{(\mathbf{e}_1, \overrightarrow{O\Omega(t)})}$ .

Pour déterminer les coordonnées cartésiennes de  $\mathbf{M}$ , on utilise la relation de Chasles

$$\overrightarrow{O\mathbf{M}(t)} = \overrightarrow{O\Omega(t)} + \overrightarrow{\Omega(t)\mathbf{M}(t)}.$$

Le point  $\mathbf{S}(t)$  a pour coordonnées  $(R \cos t, R \sin t)$ . De plus, le point  $\Omega(t)$  a pour coordonnées  $(\frac{3}{4}R \cos t, \frac{3}{4}R \sin t)$ . Enfin, introduisons les angles orientés :

$$\theta(t) = \widehat{(\mathbf{e}_1, \overrightarrow{\Omega(t)\mathbf{M}(t)})} \quad \text{et} \quad \alpha(t) = \widehat{(\overrightarrow{\Omega(t)\mathbf{M}(t)}, \overrightarrow{\Omega(t)\mathbf{S}(t)})}$$

de sorte que dans le repère mobile  $(\Omega(t), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , le point  $\mathbf{M}(t)$  a pour coordonnées  $(\frac{1}{4}R \cos \theta(t), \frac{1}{4}R \sin \theta(t))$ . Notons que l'on a la relation :

$$\alpha(t) + \theta(t) \equiv t \pmod{2\pi}.$$

Enfin, remarquons que les deux courbes en vert (parcours de  $\mathbf{M}$  et de  $\mathbf{S}$  entre 0 et  $t$ ) ont la même longueur, à savoir  $tR$ . D'où  $\frac{1}{4}R\alpha(t) = tR$ , ce qui fournit  $\alpha(t) \equiv 4t \pmod{2\pi}$ , puis  $\theta(t) \equiv -3t \pmod{2\pi}$  et finalement :

$$\overrightarrow{O\mathbf{M}(t)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}R \cos t \\ \frac{3}{4}R \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4}R \cos(3t) \\ -\frac{1}{4}R \sin(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos^3 t \\ R \sin^3 t \end{pmatrix}.$$



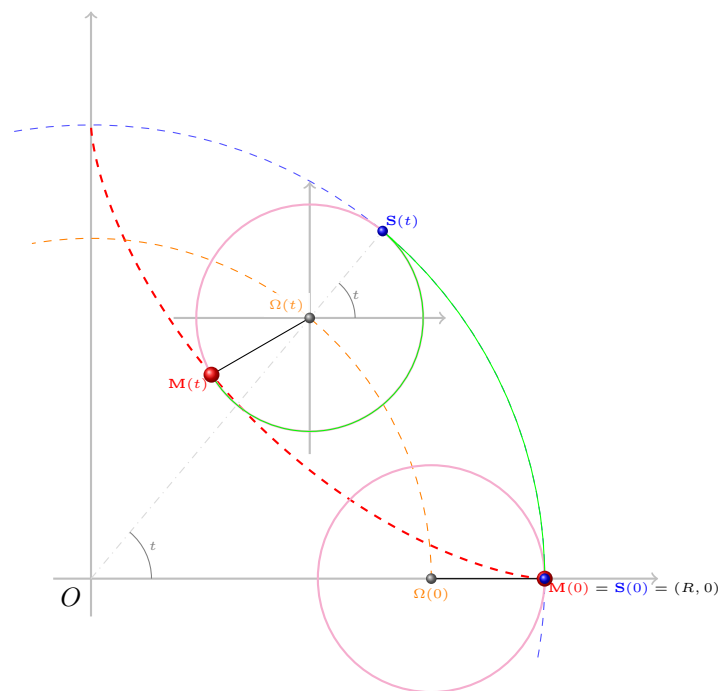


FIGURE 1.10 – Dérivation des coordonnées de la courbe paramétrée



# Chapitre 2

## Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^2$

Pour pouvoir modéliser des phénomènes physiques plus généraux, on présente dans ce chapitre le concept de fonction de plusieurs variables. En effet, en mécanique des fluides par exemple, les inconnues dépendent généralement du temps et des trois variables d'espace. En thermodynamique, les lois d'état permettent d'exprimer une inconnue comme une fonction de deux autres. Il faut donc étendre les notions étudiées en dimension 1 (continuité, dérivabilité, intégrabilité) aux dimensions supérieures. On se focalisera sur la dimension 2, la majorité des concepts se généralisant directement à la dimension 3. On mettra en particulier en évidence que la prise en compte d'une dimension supérieure peut augmenter grandement le champ des possibilités du fait du nombre infini de directions au départ d'un point (contre seulement 2 directions en dimension 1).

Tous les vecteurs considérés dans la suite sont des vecteurs colonnes. On notera  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  et  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  les vecteurs unitaires de la base euclidienne.

### 2.1 Fonctions de deux variables

Dans cette partie, on considère une fonction scalaire<sup>1</sup>

$$f : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un domaine ouvert inclus dans  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\mathbf{M}$  est le point de coordonnées  $(x_1, x_2)$ , on notera indifféremment  $f(\mathbf{M})$  et  $f(x_1, x_2)$ .

**Exemple :** La population  $P$  d'une espèce isolée dépend du temps  $t$  que l'on considère et de la population initiale  $p_0$ . Considérons que la population évolue selon la loi suivante

$$\begin{cases} P'(t) = -0,4 \times P(t), \\ P(0) = p_0. \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy assure l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle ordinaire ci-dessus. Cette solution dépend continûment de la donnée initiale. On peut résoudre l'équation explicitement :

$$P(t; p_0) = p_0 e^{-0,4t}.$$

Le **graphe de la fonction**  $f$  est alors une surface dans  $\mathbb{R}^3$  dont les points dans un repère orthonormé  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  ont pour coordonnées  $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ ,  $(x_1, x_2) \in \Omega$ .

---

1. On dit aussi champ scalaire.

### 2.1.1 Continuité

#### Définition 2.1

La fonction  $f$  est **continue** au voisinage du point  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Omega$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \|(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\| < \alpha \implies |f(x_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)| < \varepsilon.$$

Cela signifie que, quel que soit le chemin emprunté pour arriver au point  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , le point correspondant sur le graphe arrive en  $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . Il est ainsi facile de justifier qu'une fonction n'est pas continue.

**Exemple:** Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$g : \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Cette fonction est continue au voisinage de tout point  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq (0, 0)$  mais pas en  $(0, 0)$ . En effet, si on rejoint le long des axes des abscisses ou des ordonnées, on a bien :

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} g(x_1, 0) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} 0 = 0 = g(0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} g(0, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} 0 = 0 = g(0, 0).$$

En revanche, si l'on rejoint  $(0, 0)$  le long de la 1<sup>ère</sup> bissectrice  $x_1 = x_2$ , on a :

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} g(x_1, x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = g(0, 0).$$

### 2.1.2 Dérivées partielles

#### Dérivées premières

#### Définition 2.2

On dit que la fonction  $f$  admet une **dérivée partielle première** par rapport à  $x_1$  (resp. par rapport à  $x_2$ ) en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Omega$  si la limite suivante est finie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h} \quad \left( \text{resp.} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + h) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h} \right).$$

Le cas échéant, on note  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  (resp.  $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ) la limite.

Concrètement, on détermine la dérivée partielle première de  $f$  par rapport à  $x_1$  en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  en fixant  $x_2 = \bar{x}_2$  désormais considérée comme une constante et non plus comme une variable. Si la fonction résultante  $x_1 \mapsto f(x_1, \bar{x}_2)$  est dérivable, on calcule sa dérivée en  $\bar{x}_1$  pour obtenir  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

**Exemple:** On reprend la fonction  $g$  de l'exemple précédent où on a prouvé que  $g$  n'était pas continue en  $(0, 0)$ . En revanche,  $g$  admet des dérivées partielles en  $(0, 0)$ . En effet :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0, h) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Aux autres points, on calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Ainsi, contrairement à la dimension 1, il ne suffit pas d'admettre des dérivées partielles pour en déduire la continuité de la fonction. Les dérivées partielles ne rendent compte que des variations le long des axes. On peut définir le concept plus général de dérivées directionnelles.

**Définition 2.3**

Soient  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Omega$  et  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  tels que  $(\bar{x}_1 + hu_1, \bar{x}_2 + hu_2) \in \Omega$  pour  $h \in \mathbb{R}$  suffisamment petit. On dit que  $f$  est dérivable en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  dans la direction  $\mathbf{u}$  si l'application  $\phi : h \mapsto f(\bar{x} + h\mathbf{u})$  est dérivable en 0, i.e. si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h\mathbf{u}) - f(\bar{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + hu_1, \bar{x}_2 + hu_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h}$$

existe et est finie.

Les dérivées partielles correspondent donc aux dérivées dans les directions  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$ . Mais cette notion ne suffit pas non plus pour obtenir la continuité de la fonction car elle se limite à des droites comme chemin pour parvenir au point considéré.

On définit une notion plus forte, la différentiabilité, qui est l'extension naturelle de la proposition 0.6 et qui prend en compte tous les chemins possibles.

**Définition 2.4**

Une fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **différentiable** en  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Omega$  s'il existe une application linéaire  $\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et un champ scalaire  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie  $\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \varphi(h_1, h_2) = 0$  tels que

$$f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2 + h_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \ell(h_1, h_2) + \|\mathbf{h}\|\varphi(h_1, h_2)$$

pour  $\|\mathbf{h}\|$  suffisamment petite.

Les relations entre les différents concepts présentés ci-dessus sont les suivantes :

**Proposition 2.1**

1. Si  $f$  admet des dérivées partielles premières (par rapport à  $x_1$  et à  $x_2$ ) continues au voisinage de  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , alors la fonction  $f$  est différentiable en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .
2. Si  $f$  est différentiable en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , alors la fonction  $f$  est continue au voisinage de  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  et  $f$  admet des dérivées partielles premières en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .
3. Si  $f$  est différentiable en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , alors  $f$  admet des dérivées en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  dans toutes les directions.

**Remarque :** L'application  $\ell$  de la définition 2.4 est appelée la **différentielle de  $f$  en  $\bar{x}$**  et est très souvent notée  $d_{\bar{x}}f$ . Elle est donnée par

$$d_{\bar{x}}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)dx_2.$$

Les dérivées partielles fournissent toutefois des informations sur le comportement de la fonction. En dimension 1, le fait que  $f' = 0$  sur son ensemble de définition implique que  $f$  est une fonction constante. L'analogue en dimension 2 est le suivant :

**Proposition 2.2**

On suppose que  $\Omega$  est un domaine sans trou.

1. Si la fonction  $f$  vérifie  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$  pour tout  $(x_1, x_2) \in \Omega$ , alors il existe une fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(x_1, x_2) = \varphi(x_2)$ .
2. Si la fonction  $f$  vérifie  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$  pour tout  $(x_1, x_2) \in \Omega$ , alors il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que  $f(x_1, x_2) = c$ .

Le calcul des dérivées partielles reprend les mêmes règles qu'en dimension 1 (somme, produit, quotient). Pour la composition, on a les résultats suivants :

**Proposition 2.3 (Formule de la chaîne)**

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables en  $t_0$ . On note  $\bar{x}_1 = \varphi_1(t_0)$  et  $\bar{x}_2 = \varphi_2(t_0)$ . Si  $f$  est différentiable en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , alors la fonction  $\Phi : t \mapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  est dérivable en  $t_0$  avec :

$$\Phi'(t_0) = \varphi_1'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) + \varphi_2'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)).$$

**Exemple :** On considère la courbe paramétrée pour  $t \in \mathbb{R}_+$  par

$$x_1(t) = \frac{3t}{1+t^3} \quad \text{et} \quad x_2(t) = \frac{3t^2}{1+t^3},$$

ainsi que la fonction  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ . D'après la proposition précédente, la fonction  $\Phi'(t) = f(x_1(t), x_2(t))$  vérifie

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= 3 \frac{1+t^3-3t^3}{(1+t^3)^2} \left( \frac{27t^2}{(1+t^3)^2} - \frac{9t^2}{1+t^3} \right) + 3 \frac{2(1+t^3)-3t^4}{(1+t^3)^2} \left( \frac{27t^4}{(1+t^3)^2} - \frac{9t}{1+t^3} \right) \\ &= \frac{27}{(1+t^3)^4} [(1-2t^3)(2t^2-t^5) + (2t-t^4)(2t^4-t)] = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $\Phi$  est constante et  $\Phi(t) = \Phi(0) = f(0, 0) = 0$ .

**Proposition 2.4**

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  et  $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable en  $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$  avec  $g_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \bar{x}_1$  et  $g_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \bar{x}_2$ . Alors la fonction  $F : (y_1, y_2) \mapsto f(g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2))$  est différentiable en  $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$  avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \\ \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2). \end{aligned}$$

**Dérivées secondes**

On définit de même, lorsque c'est possible, les dérivées secondes :

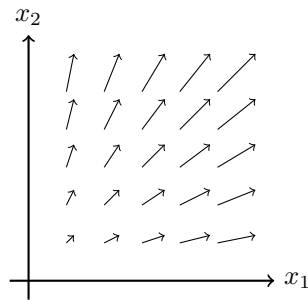
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right], \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right], \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + h) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right], \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + h) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right]. \end{aligned}$$

On peut ensuite définir les dérivées partielles  $n$ -ièmes par récurrence. La question se pose alors de savoir si dériver par rapport à  $x_i$  puis par rapport à  $x_j$  est équivalent à dériver par rapport à  $x_j$  puis par rapport à  $x_i$ . La réponse est apportée par le résultat suivant :

**Théorème 2.1 (Schwarz)**

Si les dérivées secondes croisées existent et sont continues au voisinage de  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , alors elles sont égales :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

FIGURE 2.1 – Champ de vecteurs  $\mathbf{U}(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ 

## 2.2 Opérateurs différentiels

### 2.2.1 Définitions

#### Définition 2.5

Un **champ de vecteurs** sur  $\mathbb{R}^2$  est une fonction

$$\mathbf{U}(x_1, x_2) : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x_1, x_2) \mapsto \mathbf{U}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} U_1(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = U_1(x_1, x_2)\mathbf{e}_1 + U_2(x_1, x_2)\mathbf{e}_2, \end{cases}$$

où les composantes  $U_1$  et  $U_2$  sont des fonctions scalaires.

On dit qu'un champ de vecteurs  $\mathbf{U}$  admet des dérivées partielles si chacune de ses composantes en admet.

#### Définition 2.6

1. Si  $f$  est une fonction admettant des dérivées partielles premières (par rapport à  $x$  et à  $y$ ), on appelle **gradient de  $f$**  le champ de vecteurs

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

On note aussi  $\overrightarrow{\text{grad}} f$ . Lorsque le champ de vecteurs  $\mathbf{U}$  est tel qu'il existe une fonction  $f$  telle que  $\mathbf{U} = \nabla f$ , on dit que  $\mathbf{U}$  est un **champ de gradient**.

2. Si  $f$  est une fonction admettant des dérivées secondes, on définit la **matrice hessienne** par :

$$\text{Hess } f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

La trace de cette matrice est appelée le **laplacien de  $f$**  :  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ .

#### Remarques :

- Si les hypothèses du théorème 2.1 de Schwarz sont vérifiées, alors la matrice hessienne est symétrique.
- Si la fonction  $f$  est différentiable en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , l'application linéaire  $\ell$  impliquée dans la définition 2.4 est donnée par :  $\ell(\mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot \nabla f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

#### Erreurs courantes

Le gradient est un vecteur, pas un scalaire. Très souvent, les étudiants écrivent la somme des dérivées partielles premières pour définir le gradient. De même, l'erreur la plus courante sur la définition de la matrice hessienne est d'écrire la transposée en intervertissant les dérivées croisées.

**Définition 2.7**

Soit  $\mathbf{U}$  un champ de vecteurs admettant des dérivées partielles premières.

1. La **jacobienne** de  $\mathbf{U}$  est la matrice

$$\text{Jac } \mathbf{U}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la jacobienne est nommé le **jacobien** :  $\text{jac } \mathbf{U} = \det(\text{Jac } \mathbf{U})$ .

2. On définit la **divergence** de  $\mathbf{U}$  comme la trace de la jacobienne de  $\mathbf{U}$ , i.e.

$$\nabla \cdot \mathbf{U}(x_1, x_2) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(x_1, x_2).$$

On note aussi la divergence  $\text{div } \mathbf{U}$ .

3. En dimension 2, on trouve dans la littérature la notion de **rotationnel scalaire** (restriction du rotationnel qui sera défini par (4.1)) :

$$\nabla \wedge \mathbf{U}(x_1, x_2) = \frac{\partial U_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(x_1, x_2).$$

4. Si  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$ , on définit l'opérateur  $(\mathbf{V} \cdot \nabla)$  par :

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \cdot \nabla U_1 \\ \mathbf{V} \cdot \nabla U_2 \end{pmatrix}.$$

**Remarque :** La divergence d'un champ de vecteurs  $\mathbf{U}$  traduit l'expansion ou la contraction d'un fluide qui évolue à la vitesse  $\mathbf{U}$ . En particulier, un fluide à divergence nulle est incompressible.

Le rotationnel en un point traduit la faculté d'un fluide à tourner autour de ce point.

En utilisant les définitions 2.6 et 2.7, on vérifie que :

$$\text{Hess } f = \text{Jac } \nabla f \quad \text{et} \quad \Delta f = \nabla \cdot \nabla f.$$

**Erreurs courantes**

Là aussi, il y a beaucoup de confusions : la divergence est un scalaire, pas un vecteur. De même, il faut faire attention à ne pas écrire la transposée de la matrice jacobienne.

**Définition 2.8**

Soit  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  un champ matriciel. La divergence de  $\mathbf{A}$  est le champ de vecteurs obtenu en prenant la divergence des vecteurs lignes :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

**Remarque :** Le résultat de la proposition 2.4 se réécrit :

$$\nabla F(y_1, y_2) = {}^t \text{Jac } \mathbf{G}(y_1, y_2) \nabla f(g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)),$$

où  $\mathbf{G}$  est le champ de vecteurs  $(y_1, y_2) \mapsto (g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2))$ .

Un résultat utile est le suivant qui permet de caractériser un champ de vecteurs grâce à son rotationnel (ce résultat se généralise naturellement en dimension 3, voir théorème 4.1).



**Théorème 2.2 (Poincaré)**

*Soit  $\mathbf{U}$  un champ de vecteurs admettant des dérivées premières continues sur le domaine  $\Omega$  que l'on suppose sans trou. Alors  $\mathbf{U}$  est un champ de gradient si et seulement si  $\nabla \wedge \mathbf{U} = 0$ .*

De manière générale, étant donné un champ de vecteurs  $\mathbf{U}$ , trouver une fonction scalaire  $f$  telle que  $\mathbf{U} = \nabla f$  revient à résoudre un système de deux équations à une inconnue, ce qui dans la majorité des cas est insoluble. Toutefois, lorsque le rotationnel de  $\mathbf{U}$  est nul, cela revient à dire que les deux équations sont liées, ce qui en permet la résolution.

**Exemple :** On considère les champs de vecteurs  $\mathbf{U}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ \sin x_1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{V}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1(x_2^2 + x_1) \\ x_1^2 x_2 \end{pmatrix}$ .

- On note que  $\nabla \wedge \mathbf{U} = \cos x_1 - \sin x_2 \neq 0$ . On cherche à déterminer  $f$  telle que  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = U_1$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_2} = U_2$ . En intégrant la seconde équation, on obtient  $f(x_1, x_2) = x_2 \sin x_1 + \psi(x_1)$  pour toute fonction  $\psi$ . En injectant cette expression dans la première équation, on obtient  $\psi'(x_2) = \cos x_2 - x_2 \cos x_1$ , ce qui n'a pas de sens ( $\psi$  ne peut pas dépendre de  $x_1$ ).
- En revanche, on a  $\nabla \wedge \mathbf{V} = 0$ . En reprenant le même raisonnement, on obtient  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{2} + \frac{x_1^3}{3} + c$ .

### 2.2.2 Expressions en coordonnées polaires

On note  $\Phi$  le changement de variables en coordonnées polaires défini par (2) :

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

La matrice jacobienne de ce champ de vecteurs est  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$  et son jacobien vaut  $r$ . Ce résultat sera utilisé dans le chapitre 3.

Prenons maintenant un champ scalaire  $f : (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$  définie sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Supposons que ce domaine peut être paramétré en coordonnées polaires par  $(r, \theta) \in \mathcal{D}$ . On note alors

$$\hat{f}(r, \theta) = f \circ \Phi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Par application de la proposition 2.4, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial r}(r, \theta) &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x_1}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x_2}(r \cos \theta, r \sin \theta), \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x_1}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x_2}(r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

Si l'on note  $\nabla_{\text{pol}} \hat{f}$  le vecteur  $(\partial_r \hat{f}, \partial_\theta \hat{f})$  et  $\nabla_{\text{cart}} f$  le vecteur  $(\partial_1 f, \partial_2 f)$ , on a la relation :

$$\nabla_{\text{pol}} \hat{f}(r, \theta) = {}^t \text{Jac } \Phi(r, \theta) \nabla_{\text{cart}} f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

En inversant la matrice  $\text{Jac } \Phi$ , on déduit :

$$\nabla f(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r}(r, \theta) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}(r, \theta) \mathbf{e}_\theta.$$

On a de même :

$$\Delta \hat{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \theta^2}.$$

Si  $\mathbf{U} = U_1 \mathbf{e}_1 + U_2 \mathbf{e}_2 = U_r \mathbf{e}_r + U_\theta \mathbf{e}_\theta$ , on a :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}, \\ \nabla \wedge \mathbf{U} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

## 2.3 Lignes de niveau

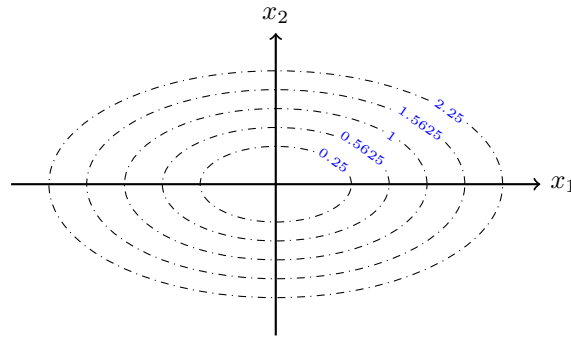
Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un champ scalaire.

### Définition 2.9

Soit  $c \in \mathbb{R}$ . La ligne de niveau  $c$  de la fonction est l'ensemble des points du plan dont l'image par  $f$  est égale à  $c$  :

$$\mathcal{L}_f(c) = \{(x_1, x_2) \in \Omega \mid f(x_1, x_2) = c\}.$$

Cela revient à déterminer dans  $\mathbb{R}^3$  l'intersection de la surface représentative de la fonction  $f$  avec le plan d'équation  $x_3 = c$ . La ligne de niveau peut donc être vide. Par exemple, sur la figure 2.2, on constate que la fonction  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  car les lignes de niveau  $c < 0$  sont vides, la ligne de niveau 0 est réduite à l'origine et les lignes de niveau  $c > 0$  sont des ellipses.


 FIGURE 2.2 – Quelques lignes de niveau de la fonction  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2$ 
**Proposition 2.5**

Soit  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  un point appartenant à la ligne de niveau  $c$  de la fonction  $f$ . Alors le vecteur  $\nabla f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  est normal à  $\mathcal{L}_f(c)$  en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

L'intersection du graphe d'une fonction de deux variables (surface) avec un plan est une courbe. La question se pose alors de savoir comment décrire cette courbe.

**Théorème 2.3 (Fonctions implicites)**

Soit  $c \in \mathbb{R}$  tel que la ligne de niveau  $\mathcal{L}_f(c)$  est non vide. On suppose que la fonction  $f$  admet des dérivées partielles continues sur  $\Omega$ . Soit  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathcal{L}_f(c)$  tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0. \quad (\text{FI.Hyp})$$

Alors il existe :

- un voisinage  $I \subset \mathbb{R}$  de  $\bar{x}_1$
- et une fonction dérivable  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$

tels que  $\bar{x}_2 = \varphi(\bar{x}_1)$  et :

$$\forall x_1 \in I, f(x_1, \varphi(x_1)) = c.$$

Par application de la proposition 2.3, la fonction  $\varphi$  est solution de l'EDO :

$$\varphi'(x_1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1))}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1))}, \quad \varphi(\bar{x}_1) = \bar{x}_2.$$

**Remarque :** L'hypothèse (FI.Hyp) correspond à l'absence de tangente verticale en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . Si ce n'est pas le cas, on suppose que  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0$ . Dans ce cas, le théorème conduit à l'existence d'une fonction  $\psi$  telle que  $f(\psi(x_2), x_2) = c$  au voisinage de  $\bar{x}_2$ . Le seul cas qui ne permet pas de paramétrer la ligne de niveau est donc le cas où  $\nabla f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ .

Ce théorème traduit ainsi le fait qu'une ligne de niveau  $f(x_1, x_2) = c$ , qui peut être interprétée comme une équation sur le couple  $(x_1, x_2)$ , coïncide localement avec le graphe d'une fonction scalaire  $x_2 = \varphi(x_1)$ . Ceci exprime la dépendance d'une variable par rapport à l'autre.  $\varphi$  est alors appelée fonction implicite car le théorème fournit l'existence de la fonction mais pas son expression. Toutefois, dans certains cas, on peut exprimer analytiquement  $x_2$  en fonction de  $x_1$ .

**Exemple :** Reprenons la fonction  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2$  décrite sur la figure 2.2 et considérons la ligne de niveau 1. En dehors des points  $(2, 0)$  et  $(-2, 0)$  pour lesquels les tangentes sont verticales, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , ce qui garantit l'existence d'une fonction  $\varphi$  telle que  $x_2 = \varphi(x_1)$ . De plus, l'égalité  $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1$  fournit  $x_2 = \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{4}}$  si  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  appartient à la demi-ellipse supérieure, ou  $x_2 = -\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{4}}$  si  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  appartient à la demi-ellipse inférieure.



# Chapitre 3

## Calcul intégral dans $\mathbb{R}^2$

### 3.1 Intégrales curvilignes ; circulation et flux d'un champ de vecteurs

Soient  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un champ scalaire,  $\mathbf{U} = (U_1, U_2) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ de vecteurs et  $\mathcal{C} \subset \Omega$  une courbe dans  $\mathbb{R}^2$ , que l'on paramètre par  $\mathbf{M}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . On suppose que les coordonnées du paramètre  $x_1$  et  $x_2$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .

#### Définition 3.1

Notons  $S$  l'abscisse curviligne de l'arc  $\mathcal{C}$ . L'**intégrale curviligne** de la fonction  $f$  sur  $\mathcal{C}$  est définie par

$$\int_{\mathcal{C}} f \, dS = \int_I f(\mathbf{M}(t)) \|\mathbf{M}'(t)\| \, dt.$$

#### Définition 3.2

La **circulation** du champ de vecteurs  $\mathbf{U}$  le long de la courbe  $\mathcal{C}$  est donnée par :

$$\int_I [U_1(x_1(t), x_2(t))x_1'(t) + U_2(x_1(t), x_2(t))x_2'(t)] \, dt = \int_I \mathbf{U}(\mathbf{M}(t)) \cdot \mathbf{M}'(t) \, dt.$$

**Remarque :** Les **intégrales curvilignes** sont des intégrales calculées le long d'une courbe de dimension 1. Cet outil hérite donc de toutes les propriétés des intégrales vues dans le chapitre 0 (linéarité, relation de Chasles, ...).

Même si le paramétrage  $\mathbf{M}$  apparaît dans la définition, une intégrale curviligne ne dépend que du champ de vecteurs et de la courbe géométrique :

#### Proposition 3.1

La circulation de  $\mathbf{U}$  le long de  $\mathcal{C}$  est indépendante de la paramétrisation choisie.

**Notation :** Du fait de cette proposition et par souci de commodité, on note souvent la circulation de  $\mathbf{U}$  le long de  $\mathcal{C}$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{M} = \int_{\mathcal{C}} U_1 dx_1 + U_2 dx_2.$$

L'objet  $U_1 dx_1 + U_2 dx_2$  est une forme différentielle de degré 1. Toutefois, comme annoncé dans l'avant-propos, on ne présentera pas l'approche par les formes différentielles dans le cadre de ce cours.

Dans la littérature, lorsque l'intégrale curviligne est considérée le long d'une courbe fermée  $\mathcal{C}$ , on pourra trouver la notation :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{M}.$$

La généralisation du théorème 0.3 aux intégrales curvilignes est la suivante :

**Théorème 3.1**

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan et que supposons  $\mathcal{C}$  est un arc paramétré  $\widehat{AB}$ . Si  $\mathbf{U}$  est un champ de gradient ( $\mathbf{U} = \nabla f$ ), alors :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{M} = \int_{\widehat{AB}} \nabla f \cdot d\mathbf{M} = f(B) - f(A).$$

**Remarque :** Il y a deux conséquences à ce théorème :

- La première est que la circulation d'un champ de gradient est indépendante du chemin parcouru entre  $A$  et  $B$ .
- La seconde est que si la courbe  $\mathcal{C}$  est fermée ( $A = B$ ), alors  $\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{M} = 0$ .

**Preuve :** Soit  $\mathbf{M} : t \in [a, b] \mapsto (y_1(t), y_2(t))$  un paramétrage de  $\mathcal{C}$  avec  $\mathbf{M}(a) = A$  et  $\mathbf{M}(b) = B$ . Par définition, la circulation du champ de vecteurs  $\nabla f$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{M} &= \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1(t), y_2(t))y_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(y_1(t), y_2(t))y_2'(t) \right] dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(y_1(t), y_2(t))] dt && \text{(Prop. 2.3)} \\ &= f(y_1(b), y_2(b)) - f(y_1(a), y_2(a)) = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Il existe un cas particulier de champs de vecteurs :

**Définition 3.3**

On dit qu'un champ de vecteurs  $\mathbf{U}$  est à **circulation conservative** si la circulation de  $\mathbf{U}$  le long de toute courbe fermée est nulle.

**Proposition 3.2**

Soit  $\mathbf{U}$  un champ de vecteurs sur  $\Omega$  supposé sans trou. Alors  $\mathbf{U}$  est à circulation conservative si et seulement si  $\mathbf{U}$  est un champ de gradient.

On introduit enfin la notion de flux d'un champ de vecteurs qui est un autre exemple d'intégrale curviligne :

**Définition 3.4**

On suppose que  $\mathcal{C}$  est une courbe fermée délimitant le domaine  $\mathcal{D}$  borné et orientée dans le sens direct. Soit  $t \mapsto \boldsymbol{\nu}(t) = (x_2'(t), -x_1'(t))$  un vecteur normal à  $\mathcal{C}$  extérieur à  $\mathcal{D}$ . Le **flux** du champ de vecteurs  $\mathbf{U}$  à travers la courbe  $\mathcal{C}$  est donné par :

$$\int_I \mathbf{U}(\mathbf{M}(t)) \cdot \boldsymbol{\nu}(t) dt = \int_I [U_1(x_1(t), x_2(t))x_2'(t) - U_2(x_1(t), x_2(t))x_1'(t)] dt.$$

**Notation :** On note très fréquemment le flux

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

où  $\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\nu}}{\|\boldsymbol{\nu}\|}$  est le vecteur normal extérieur unitaire et  $d\sigma$  la mesure surfacique.

Comme le champ  $\mathbf{M}'(t)$  est tangent à la courbe  $\mathcal{C}$ , la circulation prend en compte la composante tangentielle du champ  $\mathbf{U}$ , alors que le flux intègre la composante normale de  $\mathbf{U}$ .

## 3.2 Intégrales doubles

Dans cette partie, on définit l'intégrale en dimension 2 de manière analogue à la dimension 1, puis on donne les principaux résultats permettant de calculer ces intégrales en pratique.

Dans toute la suite, on considère une fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un domaine  $\Omega$  fermé et borné, délimité par une courbe  $\mathcal{C}$ .

### 3.2.1 Définition

On reprend la même approche que pour la définition 0.10.

#### Définition 3.5

On appelle **subdivision régulière** d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  du pavé  $[a, b] \times [c, d]$  la famille finie de rectangles  $R_{jk} = [x_{1,j}, x_{1,j+1}] \times [x_{2,k}, x_{2,k+1}]$  avec  $x_{1,j} = a + j \frac{b-a}{n}$  et  $x_{2,k} = c + k \frac{d-c}{n}$ . On note  $G_{jk}$  le centre du rectangle  $R_{jk}$ .

Pour tout pavé  $Q = [a, b] \times [c, d] \supset \Omega$ , on construit la fonction  $\tilde{f}_Q$  en prolongeant  $f$  par 0 dans  $Q \setminus \Omega$  :

$$\tilde{f}_Q : (x_1, x_2) \in Q \mapsto \begin{cases} f(x_1, x_2), & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 0, & \text{si } (x_1, x_2) \in Q \setminus \Omega. \end{cases}$$

#### Définition 3.6

On définit la **somme de Riemann de  $f$  relative à la subdivision  $(R_{jk})_{0 \leq j, k \leq n}$**  la quantité :

$$\mathcal{R}_n(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{1,j+1} - x_{1,j})(x_{2,k+1} - x_{2,k}) \tilde{f}_Q(G_{jk}).$$

#### Définition 3.7

Lorsque la suite  $\mathcal{R}_n(f)$  admet une limite finie lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on dit que la fonction  $f$  est **intégrable sur  $\Omega$** . La limite est appelée **intégrale double de  $f$  sur  $\Omega$**  et est notée

$$\iint_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} f.$$

Cette intégrale vérifie les mêmes propriétés que son équivalent en dimension 1 :

#### Proposition 3.3

- Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions intégrables sur  $\Omega$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $f + \lambda g$  est intégrable avec

$$\iint_{\Omega} (f + \lambda g) = \iint_{\Omega} f + \lambda \iint_{\Omega} g;$$

- L'intégrale double d'une fonction positive est positive;
- Si  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  et si  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  se restreint à une courbe de dimension 1, alors

$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f.$$

On termine en donnant l'interprétation géométrique de cet outil mathématique :

#### Théorème 3.2

Si  $f$  est une fonction positive et intégrable sur  $\Omega$ , alors  $\iint_{\Omega} f$  représente le volume contenu entre le graphe de  $f$ ,  $x_3 = f(x_1, x_2)$ , et le domaine  $\Omega \times \{x_3 = 0\}$ .

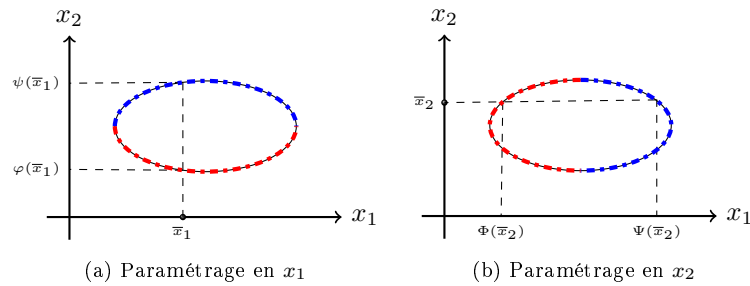


FIGURE 3.1 – Changement de paramétrage pour l'application du théorème de Fubini

### 3.2.2 Théorème de Fubini

En pratique, pour calculer une intégrable double, on peut se ramener à des intégrales simples grâce au théorème suivant (voir Figure 3.1) :

#### Théorème 3.3

*On suppose qu'il existe deux fonctions dérivables  $\varphi$  et  $\psi$  définies sur un intervalle  $I$  de sorte que le domaine  $\Omega$  puisse être décrit par :*

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in I, \varphi(x_1) \leq x_2 \leq \psi(x_1)\}.$$

*Si  $f$  est intégrable sur  $\Omega$ , alors*

$$\iint_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_I \left( \int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$

Un cas particulier est celui où la fonction  $f$  est une fonction intégrable sur un rectangle  $Q = [a, b] \times [c, d]$ . Le théorème de Fubini s'écrit alors :

$$\iint_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_a^b \left( \int_c^d f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_c^d \left( \int_a^b f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2.$$

L'avantage est qu'ici les bornes ne dépendent plus des variables.

#### Remarques :

- Le théorème est également valable pour un paramétrage en  $x_2$  lorsque  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in J, \Phi(x_2) \leq x_1 \leq \Psi(x_2)\}$ .
- Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont les fonctions implicites découlant du théorème 2.3 appliqué au bord  $\mathcal{C}$  de  $\Omega$ .

### 3.2.3 Changement de variables

Un deuxième outil pour calculer des intégrales doubles est le théorème de changement de variables (équivalent du théorème 0.4) :

#### Théorème 3.4

*Soit  $\Phi : \Theta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$  un champ de vecteurs injectif admettant des dérivées partielles continues. Pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $\Omega$ , on a :*

$$\iint_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Theta} f(\Phi(y_1, y_2)) |\det(\text{Jac } \Phi(y_1, y_2))| dy_1 dy_2.$$

**Exemple :** On considère la fonction  $h : (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 + x_2^2)^\alpha$  définie pour  $\alpha > 0$  sur la boule unité  $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ . Effectuons un changement de variables en coordonnées polaires (voir le champ  $\Phi$  défini au paragraphe 2.2.2). On



note  $Q = [0, 1] \times [0, 2\pi[$  et  $\hat{h}(r, \theta) = h(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^{\alpha/2}$ . En appliquant le théorème précédent, il vient :

$$\iint_{\mathcal{Q}} h(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_Q \hat{h}(r, \theta) r dr d\theta.$$

On applique ensuite le théorème de Fubini :

$$\iint_Q \hat{h}(r, \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \hat{h}(r, \theta) r dr \right) d\theta = 2\pi \int_0^1 r^{1+\alpha/2} dr = \frac{2\pi}{2 + \alpha/2}.$$

### 3.2.4 Formule de Green-Riemann

Un dernier outil de calcul des intégrales doubles est la formule de Green-Riemann, qui permet de transformer une intégrale double en intégrale curviligne.

#### Théorème 3.5 (Green-Riemann)

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ , sans trou et délimité par une courbe  $\mathcal{C}$  paramétrée dans le sens direct. On suppose que le champ de vecteurs  $\mathbf{U}$  admet des dérivées partielles continues. Alors :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{U}(\mathbf{M}(t)) \cdot \mathbf{M}'(t) dt = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial U_2}{\partial x_1}(y_1, y_2) - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(y_1, y_2) \right] dy_1 dy_2 = \iint_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{U}(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Une conséquence directe de ce théorème est la formule de Green-Ostrogradsky en dimension 2 :

#### Proposition 3.4

Sous les hypothèses du théorème 3.5, on a :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{U}(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

On en déduit les formules suivantes, généralisations des formules (1) d'intégration par parties en dimension 1 :

- Si  $f$  et  $\mathbf{U}$  sont deux champs admettant des dérivées partielles continues, on a :

$$\iint_{\Omega} f(x_1, x_2) \nabla \cdot \mathbf{U}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{C}} f \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} d\sigma - \iint_{\Omega} \nabla f(x_1, x_2) \cdot \mathbf{U}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

- Si  $f$  et  $g$  sont deux champs scalaires admettant des dérivées premières et secondes continues, alors :

$$\iint_{\Omega} f(x_1, x_2) \Delta g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{C}} f \nabla g \cdot \mathbf{n} d\sigma - \iint_{\Omega} \nabla f(x_1, x_2) \cdot \nabla g(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

### 3.2.5 Application sur le disque

Prenons une fonction  $f$  continue sur le disque unité  $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ . Alors, en appliquant les 3 théorèmes précédents (Fubini, changement en coordonnées polaires et Green-Riemann), on a :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \tag{Th. 3.3}$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \right) r dr \tag{Th. 3.4+Th. 3.3}$$

$$= \int_0^{2\pi} [-U_1(\cos t, \sin t) \sin t + U_2(\cos t, \sin t) \cos t] dt. \tag{Th. 3.5}$$

La dernière égalité est valable pour tout champ de vecteurs  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$  tel que  $\nabla \wedge \mathbf{U} = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = f$ . Il existe toujours une infinité de tels champs  $\mathbf{U}$ .

### 3.3 Quelques applications

#### 3.3.1 Calcul d'aires

L'aire d'un domaine borné  $\Omega$  peut s'écrire comme l'intégrale sur  $\Omega$  de la fonction  $f(x, y) = 1$  :

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} dx_1 dx_2. \tag{3.1}$$

En pratique, on utilise souvent le résultat suivant :

**Proposition 3.5**

*Soit  $\Omega$  un domaine fermé et borné de  $\mathbb{R}^2$  délimité par une courbe  $\mathcal{C}$  sans point double et orientée dans le sens direct. Alors l'aire du domaine  $\Omega$  est égale à la circulation des champs suivants le long de  $\mathcal{C}$  :*

$$|\Omega| = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{U}_i \cdot d\mathbf{M},$$

avec au choix

$$\mathbf{U}_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_3(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

**Remarque:** Concrètement, cette proposition s'écrit :

$$|\Omega| = \int_I x_1(t)x_2'(t) dt = - \int_I x_2(t)x_1'(t) dt = \frac{1}{2} \int_I (x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)) dt.$$

En général, les trois formules n'ont pas le même degré de difficulté de calcul.

**Preuve:** La proposition est une application directe du théorème 3.5 à l'intégrale double (3.1). En effet, pour tout vecteur  $\mathbf{U}$  dont la divergence est égale à 1, on a :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{M} = \iint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{U} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} dx_1 dx_2 = |\Omega|.$$

On vérifiera que les trois vecteurs  $\mathbf{U}_i$  donnés dans l'énoncé de la proposition ont bien une divergence égale à 1. Cela marche bien sûr pour tout autre vecteur vérifiant cette propriété, ces trois là étant les plus simples.

**Exemple:** Reprenons l'exemple du paragraphe 1.4 et déterminons l'aire du domaine  $\Omega$  compris à l'intérieur de l'astroïde. Par exemple, en utilisant le vecteur  $\mathbf{U}_1$ , il vient :

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{U}_1 \cdot d\mathbf{M} = \int_0^{2\pi} x_1(t)x_2'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^3 t \times 3 \sin^2 t \cos t dt = 3 \int_0^{2\pi} [\cos^4 t - \cos^6 t] dt = 12 \int_0^{\pi/2} [\cos^4 t - \cos^6 t] dt \end{aligned}$$

par symétrie (parité puis changement de variables  $t \mapsto \pi - t$ ). On reconnaît des intégrales de Wallis

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n dt.$$

En intégrant par parties après avoir noté que  $\cos^n t = \cos^{n-1} t \times \cos t$  pour  $n \geq 1$ , on obtient la formule

$$W_n = (n-1)(W_{n-2} - W_n) \implies W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}.$$

D'où  $W_6 = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} W_0 = \frac{5\pi}{32}$  et  $|\Omega| = \frac{12}{5} W_6 = \frac{3\pi}{8}$ .

#### 3.3.2 Centre et moments d'inertie

Dans de nombreuses applications en mécanique, on peut être amené à déterminer le centre d'inertie d'un matériau, c'est-à-dire le point d'équilibre où les charges sont réparties de part et d'autre.

**Définition 3.8**

Le **centre d'inertie**  $G$  d'un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a pour coordonnées :

$$x_1^G = \frac{\iint_{\Omega} x_1 \, dx_1 dx_2}{\iint_{\Omega} dx_1 dx_2}, \quad x_2^G = \frac{\iint_{\Omega} x_2 \, dx_1 dx_2}{\iint_{\Omega} dx_1 dx_2}.$$

**Exemple :** On a supposé ici que le domaine  $\Omega$  était homogène, *i.e.* que la densité du matériau était constante. Dans le cas général, si la densité est une fonction  $(x_1, x_2) \in \Omega \mapsto \rho(x_1, x_2)$ , alors le centre d'inertie a pour coordonnées :

$$x_1^G = \frac{\iint_{\Omega} x_1 \rho(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2}{\iint_{\Omega} \rho(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2}, \quad x_2^G = \frac{\iint_{\Omega} x_2 \rho(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2}{\iint_{\Omega} \rho(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2}.$$

**Définition 3.9**

Le **moment d'inertie** par rapport à  $S(\bar{x}_1^S, \bar{x}_2^S)$  d'un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  vaut :

$$\iint_{\Omega} (x_1 - \bar{x}_1^S)^2 + (x_2 - \bar{x}_2^S)^2 \, dx_1 dx_2.$$



# Chapitre 4

## Quelques exemples dans $\mathbb{R}^3$

### 4.1 Opérateurs différentiels

#### 4.1.1 Coordonnées cartésiennes

Les notions de dérivées partielles s'étendent naturellement à la dimension 3 en rajoutant une coordonnée. Pour une fonction  $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$  définie sur un volume  $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^3$  et admettant des dérivées partielles par rapport aux trois variables, on définit le gradient par

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

et la matrice hessienne par

$$\text{Hess } f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}.$$

Si  $\mathbf{U} : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est un champ de vecteurs admettant des dérivées partielles premières, on définit la jacobienne de  $\mathbf{U}$  par

$$\text{Jac } \mathbf{U}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial U_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial U_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial U_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial U_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}.$$

De même, la **divergence** de  $\mathbf{U}$  s'écrit

$$\nabla \cdot \mathbf{U}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3).$$

La notion de rotationnel est toutefois plus générale en dimension 3 :

$$\nabla \wedge \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

**Remarque :** Le rotationnel scalaire défini dans la définition 2.7 correspond à une projection dans  $\mathbb{R}^2$ . On vérifie en effet que si  $\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3) = (U_1(x_1, x_2), U_2(x_1, x_2), 0)$ , alors  $\nabla \wedge \mathbf{U}(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \nabla \wedge (U_1, U_2)(x_1, x_2))$ .

Le théorème 2.2 reste vrai en remplaçant  $\nabla \wedge \mathbf{U}$  par  $\nabla \wedge \mathbf{U}$  :

**Théorème 4.1 (Poincaré)**

Soit  $\mathbf{U}$  un champ de vecteurs admettant des dérivées premières continues sur le domaine  $\Omega$  que l'on suppose sans trou. Alors  $\mathbf{U}$  est un champ de gradient si et seulement si  $\nabla \wedge \mathbf{U} = 0$ .

On a de plus :

**Proposition 4.1**

On suppose que  $\mathbf{U}$  admet des dérivées partielles continues dans un domaine sans trou  $\Omega$ . Alors  $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$  si et seulement s'il existe  $\mathbf{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\mathbf{U} = \nabla \wedge \mathbf{V}$ .

**4.1.2 Autres systèmes de coordonnées****Coordonnées cylindriques**

On définit l'opérateur :

$$\Phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Le jacobien vaut  $\text{jac } \Phi(r, \theta, z) = r$ . À  $f(x_1, x_2, x_3)$  on associe la fonction  $\hat{f}(r, \theta, z) = f \circ \Phi(r, \theta, z)$ .

Le gradient s'exprime dans la base mobile :

$$\nabla \hat{f} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r}(r, \theta, z) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + \frac{\partial \hat{f}}{\partial z}(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

On a de même :

$$\Delta \hat{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial z^2}.$$

Si  $\mathbf{U} = U_1 \vec{e}_1 + U_2 \vec{e}_2 + U_3 \vec{e}_3 = U_r \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta + U_z \vec{e}_z$ , on a :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \\ \nabla \wedge \mathbf{U} &= \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z. \end{aligned}$$

**Coordonnées sphériques**

On définit l'opérateur :

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta).$$

Le jacobien vaut  $\text{jac } \Phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$ . À  $f(x_1, x_2, x_3)$  on associe la fonction  $\hat{f}(r, \theta, \varphi) = f \circ \Phi(r, \theta, \varphi)$ .

Le gradient s'exprime dans la base mobile :

$$\nabla \hat{f} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r}(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi.$$

On a de même :

$$\Delta \hat{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \varphi^2}.$$

Si  $\mathbf{U} = U_1 \vec{e}_1 + U_2 \vec{e}_2 + U_3 \vec{e}_3 = U_r \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta + U_\varphi \vec{e}_\varphi$ , on a :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta U_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \nabla \wedge \mathbf{U} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \theta U_\theta) - \frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_\theta) \right] \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r U_\varphi) - \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

## 4.2 Intégrales triples

L'intégrale triple d'une fonction  $f$  sur un volume  $\mathcal{V}$ , notée

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3,$$

se construit de manière analogue en maillant un parallélépipède  $Q \supset \mathcal{V}$  à l'aide de petits parallélépipèdes dont le volume tend vers 0. On dit alors que la fonction  $f$  est intégrable sur  $\mathcal{V}$ .

En particulier, lorsque la fonction intégrée est  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  et que le domaine  $\mathcal{V}$  est borné, l'intégrale

$$\iiint_{\mathcal{V}} dx_1 dx_2 dx_3$$

correspond au volume du domaine  $\mathcal{V}$ .

Pour calculer une intégrale en dimension 3, on dispose essentiellement des mêmes outils qu'en dimension 2, à savoir le théorème de Fubini

### Théorème 4.2

*Si  $f$  est une fonction intégrable sur le domaine  $\mathcal{V} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ , alors*

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1,$$

et le théorème de changement de variables :

### Théorème 4.3

*Soit  $\Phi : \Theta \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3$  un champ de vecteurs injectif admettant des dérivées partielles continues. Pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $\Omega$ , on a :*

$$\iiint_{\Omega} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\Theta} f(\Phi(y_1, y_2, y_3)) |\det(\text{Jac } \Phi(y_1, y_2, y_3))| dy_1 dy_2 dy_3.$$

En ce qui concerne l'extension du théorème de Green-Riemann, il est nécessaire d'introduire la notion de surfaces paramétrées. On donne quelques indications dans le cas général pour se focaliser ensuite sur les cas du cylindre et de la sphère où on utilisera les systèmes de coordonnées éponymes.

### 4.2.1 Domaine quelconque

Soit  $\mathcal{V}$  un volume borné de  $\mathbb{R}^3$  dont le bord  $\mathcal{S}$  est paramétrée par  $(u, v) \in \Delta \mapsto \mathbf{M}(u, v) \in \mathcal{S}$ . On définit le vecteur

$$\mathbf{m}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}(u, v).$$

Ce vecteur est normal à la surface  $\mathcal{S}$  en  $\mathbf{M}(u, v)$ . Quitte à échanger  $u$  et  $v$ , on suppose que  $\mathbf{m}$  est extérieur à  $\mathcal{S}$ , *i.e.* qu'il pointe vers l'extérieur de  $\mathcal{V}$ .

L'aire de  $\mathcal{S}$  vaut

$$|\mathcal{S}| = \iint_{\Delta} \|\mathbf{m}(u, v)\| du dv.$$

Le **flux** du champ de vecteurs  $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  à travers la surface  $\mathcal{S}$  est défini par

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\Delta} \mathbf{U}(\mathbf{M}(u, v)) \cdot \mathbf{m}(u, v) du dv.$$

La formule de Green-Ostrograsky s'écrit :

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{U}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.2)$$

### 4.2.2 Cylindre

On considère le cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  :

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, 0 \leq x_3 \leq h\}.$$

On note alors  $\mathcal{S}$  la surface latérale du cylindre

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \leq x_3 \leq h\}.$$

Cette surface peut être paramétrée par

$$\mathbf{M}(\theta, z) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ z \end{pmatrix}, \quad (\theta, z) \in \Delta = [0, 2\pi[ \times [0, h].$$

Un vecteur normal extérieur à  $\mathcal{S}$  en  $\mathbf{M}(\theta, z)$  est alors

$$\mathbf{m}(\theta, z) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'aire de  $\mathcal{S}$  est donnée par

$$|\mathcal{S}| = \iint_{\Delta} \|\mathbf{m}(\theta, z)\| \, d\theta dz = 2\pi R h.$$

Le **flux** du champ de vecteurs  $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  à travers la surface  $\mathcal{S}$  est défini par

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \iint_{\Delta} \mathbf{U}(\mathbf{M}(\theta, z)) \cdot \mathbf{m}(\theta, z) \, d\theta dz \\ &= R \int_0^h \left( \int_0^{2\pi} U_1(R \cos \theta, R \sin \theta, z) \cos \theta + U_2(R \cos \theta, R \sin \theta, z) \sin \theta \, d\theta \right) dz. \end{aligned}$$

On reprend les mêmes calculs pour la surface supérieure

$$\mathcal{S}_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, x_3 = h\} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, h) \mid (r, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi[ \}$$

et la surface inférieure

$$\mathcal{S}_- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, x_3 = 0\} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \mid (r, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi[ \}.$$

La formule de Green-Ostrogradsky s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{U}(x_1, x_2, x_3) \, dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_{\mathcal{S} \cup \mathcal{S}_+ \cup \mathcal{S}_-} \mathbf{U} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= R \int_0^h \left( \int_0^{2\pi} U_1(R \cos \theta, R \sin \theta, z) \cos \theta + U_2(R \cos \theta, R \sin \theta, z) \sin \theta \, d\theta \right) dz \\ &\quad + \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} [U_3(r \cos \theta, r \sin \theta, h) - U_3(r \cos \theta, r \sin \theta, 0)] \, d\theta \right) r dr. \end{aligned}$$

### 4.2.3 Sphère

On considère la boule de rayon  $R$  et de centre  $O$  :

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\}.$$

On note alors  $\mathcal{S}$  la sphère  $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}$ . Cette surface peut être paramétrée par

$$\mathbf{M}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \sin \theta \\ R \sin \varphi \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in \Delta = [0, \pi] \times [0, 2\pi[.$$



Un vecteur normal extérieur à  $\mathcal{S}$  en  $\mathbf{M}(\theta, \varphi)$  est alors

$$\mathbf{m}(\theta, \varphi) = R \sin \theta \mathbf{M}(\theta, \varphi).$$

L'aire de  $\mathcal{S}$  est donnée par

$$|\mathcal{S}| = \iint_{\Delta} \|\mathbf{m}(\theta, \varphi)\| \, d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi} R^2 |\sin \theta| \, d\theta \right) d\varphi = 4\pi R^2.$$

Le **flux** du champ de vecteurs  $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  à travers la surface  $\mathcal{S}$  est défini par

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= R^2 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi} U_1(R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta) \cos \varphi \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + U_2(R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta) \sin \varphi \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + U_3(R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi. \end{aligned}$$