# Livret d'exercices

En bleu à droite figurent les résultats numériques des questions calculatoires.

## 1 Fonctions d'une variable

### Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition puis une expression de la dérivée :

$$f_1(x) = \arctan x, \quad f_2(x) = \operatorname{Sh} x, \quad f_3(x) = \operatorname{ArgCh}(x),$$
$$f_4(x) = \cos(1+x^4), \quad f_5(x) = \ln(\ln x), \quad f_6(x) = \exp(x\cos x),$$
$$f_7(x) = \int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t, \quad f_8(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \quad f_9(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

### Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties : $(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}, \ln 2 - 2 - \frac{\pi}{2}, \frac{e^{-\pi}+2}{5}, \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{12})$

$$\int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\pi/2} e^{-2x}\cos x\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

### Exercice 3

En utilisant les changements de variables préconisés, calculer les intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, en posant $x=\cos\theta$ ; $(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{12})$
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3+2\cos x}$, en posant $y=\tan\frac{x}{2}$ ; $(\frac{2\sqrt{5}}{5}\arctan\frac{\sqrt{5}}{5})$
- $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$, en posant $y=\sqrt{3}\frac{2x+1}{3}$ ; $(\frac{\pi\sqrt{3}}{9})$
- $\displaystyle\int_0^1(\operatorname{Ch} x)^2\,\mathrm{d}x$, en posant $y=e^x$. $(\frac{e^2}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8e^2})$

### Exercice 4

On note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

4.1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x$.

4.2. Calculer $I_0$, $I_1$ et $I_2$.

4.3. Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante et qu'elle converge.

4.4. En remarquant que $\sin^{n+1}x = \sin x\sin^n x$, établir une relation entre $I_{n+1}$ et $I_{n-1}$. En déduire l'expression de $I_n$ en fonction de $n$.

4.5. Déduire des questions précédentes la relation $I_{n+1}\sim I_n$ puis que la suite $(nI_nI_{n-1})$ est constante. En déduire la limite de $(I_n)$.

### Exercice 5

Soit $f$ la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}y}{\ln y}.$$

5.1. Quel est le signe de $f$ ?

5.2. Justifier que $f$ est dérivable en tout point de $]0,1[$ et déterminer sa dérivée.

5.3. (a) Prouver que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = \ln 2.$

(b) Montrer l'inégalité : $\forall\, x \in ]0,1[,\ x^2 \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x \ln 2.$

(c) En déduire l'existence et la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{x\to 1, x<1} f(x).$

(d) Montrer que $f$ tend vers 0 en 0.

## 2 Calcul vectoriel

### Exercice 6

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

6.1. Prouver l'identité : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

6.2. Le produit vectoriel est-il associatif, *i.e.* a-t-on $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ ?

6.3. Montrer que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

6.4. Prouver l'égalité : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$. *On pourra utiliser les questions précédentes.*

### Exercice 7

Soient $\vec{u} = (2,-1)$ et $\vec{v} = (1,-2)$ deux vecteurs du plan euclidien.

7.1. Calculer la norme des deux vecteurs et leur produit scalaire. $(\sqrt{5},\ 4)$

7.2. Déterminer les coordonnées des deux vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ qui ont la même norme que $\vec{u}$.

$((1,2),\ (-1,-2))$

### Exercice 8

Dans l'espace muni de sa base euclidienne $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère le vecteur $\vec{u} = (-4,-3,2)$. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ avec : $((-9/2, 3/2, 1/2))$

$$\vec{f}_1 = (1,1,0), \qquad \vec{f}_2 = (0,1,1), \qquad \vec{f}_3 = (1,0,1).$$

## Exercice 9

Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

9.1. $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 1)$ et $(0, 3, 4)$.

9.2. $(1, -1, 3)$, $(-2, 1, 6)$ et $(0, 0, 1)$.

9.3. $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 1)$ et $(0, 1, -1)$.

## Exercice 10

On se donne 4 points dans l'espace muni de sa base canonique :

$$A(1, 4, 6),\ B(-2, 5, -1),\ C(1, -1, 1),\ D(1, 1, 3).$$

10.1. Déterminer un vecteur orthogonal au plan $ABC$.

10.2. En déduire une équation cartésienne du plan $ABC$.

10.3. Calculer l'aire du triangle $ABC$. $(\frac{5}{2}\sqrt{82})$

10.4. Prouver que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires de deux manières différentes (en utilisant le déterminant et les coordonnées cartésiennes).

## 3 Géométrie

### Exercice 11 ❄

On considère les domaines :

- $\mathcal{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x\right\}$ $(\frac{1}{2})$
- $\mathcal{D}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2-x\right\}$ $(\frac{3}{2})$
- $\mathcal{D}_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 2-x \leqslant y \leqslant x\right\}$ $(1)$
- $\mathcal{D}_4 = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[ \;\middle|\; \frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3},\ r \leqslant 1\right\}$ $(\frac{\pi}{12})$

11.1. Tracer les quatre domaines dans un repère orthonormé.

11.2. Exprimer les domaines $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ en inversant le rôle des deux variables.

11.3. Paramétrer le domaine $\mathcal{D}_4$ en coordonnées cartésiennes.

11.4. Déterminer l'aire de ces domaines par un raisonnement géométrique puis par un calcul d'intégrales.

### Exercice 12 ❄

Pour chacun des domaines suivants, faire un dessin puis calculer son aire :

- $\mathcal{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\right\}$ $(\frac{1}{3})$
- $\mathcal{D}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \leqslant x \leqslant e,\ \frac{x-1}{e-1} \leqslant y \leqslant \ln x\right\}$ $(\frac{3-e}{2})$

### Exercice 13 ❄

On considère le quadrilatère $ABCD$ avec $A = (-2,0)$, $B = (0,1)$, $C = (2,0)$ et $D = (0,-1)$.

13.1. Faire un dessin et calculer la surface du quadrilatère. $(4)$

13.2. Paramétrer l'intérieur du losange sous la forme :

$$\bigcup_i \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a_i \leqslant x \leqslant b_i,\ f_i(x) \leqslant y \leqslant g_i(x)\right\}.$$

13.3. Reprendre ensuite la question 2. en échangeant les rôles de $x$ et de $y$.

### Exercice 14 ❄

On considère l'ellipse $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

14.1. Tracer $\mathscr{C}$.

14.2. Paramétrer l'intérieur de l'ellipse sous la forme :

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\right\}.$$

14.3. Reprendre ensuite la question en échangeant les rôles de $x$ et de $y$.

# 4 Courbes paramétrées

## Exercice 15

Soient $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée dans le plan euclidien par $x_1(t) = 3\cos t$ et $x_2(t) = 2\sin t$, $t \in [-\pi, \pi[$, et $P$ le point de coordonnées $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$.

15.1. Tracer $\mathscr{C}$.

15.2. Montrer que $\mathscr{C}$ est incluse dans la courbe d'équation $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{x_2^2}{4} = 1$.

15.3. Justifier que $P$ est sur $\mathscr{C}$. Déterminer la valeur du paramètre $t$ en ce point.

15.4. Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique de la tangente à $\mathscr{C}$ en $P$.

## Exercice 16

Étudier la courbe paramétrée par $x_1(t) = \operatorname{Sh} t$ et $x_2(t) = \operatorname{Ch} t$ pour $t \in \mathbb{R}$. On donnera une équation cartésienne du support.

## Exercice 17

Tracer la courbe paramétrée par $x_1(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$ et $x_2(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$ pour $t \in ]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. On montrera en particulier l'existence d'asymptotes.

## Exercice 18

On considère la courbe paramétrée par $x_1(t) = 8\sin t$ et $x_2(t) = \sqrt{2}\sin(2t)$ pour $t \in [-\pi, \pi[$. Tracer la courbe.

## Exercice 19

Soit $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée par $x_1(t) = \dfrac{t^3}{(1+t)^2(1-t)}$ et $x_2(t) = \dfrac{t^2}{1-t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

19.1. Établir le tableau de variations du paramétrage.

19.2. Existe-t-il des points singuliers ?

19.3. Prouver que la droite d'équation $2x_1 - x_2 + \dfrac{1}{4} = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

19.4. Tracer la courbe.

## Exercice 20

On considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par :

$$\begin{cases} t \longmapsto \mathbf{M}(t), \\ t \in [0, 2\pi], \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \overline{x}_1(t) = 2\cos t + \cos(2t), \\ \overline{x}_2(t) = 2\sin t - \sin(2t). \end{cases}$$

20.1. Dresser le tableau de variations du paramétrage.

20.2. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ est fermée.

20.3. Quels sont les points stationnaires de la courbe ?

20.4. Que dire de la tangente à la courbe en $t = \frac{2\pi}{3}$ ?

20.5. Calculer la longueur de $\mathscr{C}$. *On rappelle que* $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$. (16)

# 5 Calcul différentiel en dimension 2

### Exercice 21 ❄

Pour chacune des fonctions scalaires suivantes, déterminer l'ensemble de définition et les dérivées partielles :

$$f_1(x_1, x_2) = 3x_1^4 x_2 - 5x_1^2 + 2x_2, \qquad f_2(x_1, x_2) = x_2 \sin(x_1 x_2), \qquad f_3(x_1, x_2) = x_1 \int_0^{x_2^2} e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$$

$$f_4(x_1, x_2) = x_1^3 e^{x_1 x_2}, \qquad f_5(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \qquad f_6(x_1, x_2) = \ln\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right).$$

Que vaut $\Delta f_6$ ?

### Exercice 22 ❄

On définit la fonction

$$f(x_1, x_2) = \arctan\left(\frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}\right) - \arctan x_1 - \arctan x_2.$$

22.1. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ? On découpera cet ensemble en 3 sous-ensembles sur un dessin.

22.2. Montrer que $f$ est constante sur chacun de ces 3 sous-ensembles.

22.3. Calculer $f(0, 0)$, $f(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ et $f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ et en déduire la valeur de $f$ en chaque point de son ensemble de définition.

### Exercice 23

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 - x_2^2}, & \text{si } x_1 \neq \pm x_2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $f$ n'admet aucune limite en $(0, 0)$.

### Exercice 24

Pour la fonction $f$ définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + x_2^2, & \text{si } x_1 \neq 0, \\ x_2^2, & \text{sinon,} \end{cases}$$

prouver que $f$ est différentiable en $(0, 0)$ mais que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

### Exercice 25

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées premières et secondes continues telle que $\operatorname{Hess} f(x_1, x_2) = 0$ pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Prouver qu'il existe un vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ et un réel $c$ tels que $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} + c$.

### Exercice 26 ❄

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

26.1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$.

26.2. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0)$.

26.3. Qu'en déduit-on pour les fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ ?

### Exercice 27

Soient $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions deux fois dérivables. On pose

$$f(t,x) = \phi(x - 2t) + \psi(x + 2t).$$

27.1. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de $f$.

27.2. En déduire que $f$ est solution de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 0.$$

### Exercice 28 ❄

Soit $f : (x_1, x_2) \longmapsto x_1^4 + x_2^3 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2$.

28.1. Montrer que la ligne de niveau 0 de la fonction $f$ peut se paramétrer implicitement $x_2 = \phi(x_1)$ au voisinage du point $(0,0)$.

28.2. Déterminer les valeurs de $\phi(0)$, $\phi'(0)$ et $\phi''(0)$. $(0,\ 1,\ -4)$

28.3. La question 1. peut-elle s'appliquer au voisinage du point $(1,1)$ ?

### Exercice 29

Soit $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée par $x_1(t) = 2 + t^2$, $x_2(t) = t(3 + t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{L}$ la ligne de niveau 0 de la fonction $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2 - 3x_1 - 2$.

29.1. Prouver que $\mathscr{C}$ admet une tangente en tout point. En donner une équation paramétrique et une équation cartésienne.

29.2. Déterminer les points doubles de $\mathscr{C}$.

29.3. Justifier que tout point de $\mathscr{C}$ appartient à $\mathscr{L}$. Exhiber un point de $\mathscr{L}$ qui n'est pas sur $\mathscr{C}$.

## Exercice 30 ❄

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x_1, x_2) = \frac{-3x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}.$$

*On rappelle que le cercle de rayon $R$ et de centre $(x_1^0, x_2^0)$ a pour équation cartésienne :*

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 = R^2.$$

30.1. Déterminer les lignes de niveau de la fonction $f$. Tracer les lignes de niveaux $0$, $\pm 1$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{2}$.

30.2. Que peut-on en déduire sur les valeurs possibles que peut prendre la fonction $f$ ?

30.3. Calculer le gradient de la fonction $f$ en tout point $(x_1, x_2)$.

30.4. Déterminer les points $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ qui vérifient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \vec{0}$.

## Exercice 31

On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues telles que :

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0. \tag{1}$$

Soit $f$ une fonction satisfaisant l'équation (1). On pose

$$\forall\, (r, \theta) \in \left]0, +\infty\right[ \times \mathbb{R},\ g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

31.1. Déterminer les trajectoires de particules soumises au champ de vitesse $\mathbf{U}$.

31.2. Traduire l'équation (1) à l'aide du champ $\mathbf{U}$. En déduire que tous les cercles de centre $O$ sont inclus dans une ligne de niveau de $f$.

31.3. Calculer pour tout $(r, \theta) \in \left]0, +\infty\right[ \times \mathbb{R}$ la quantité $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$.

31.4. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation (1). Quelles sont les lignes de niveau des solutions ?

## Exercice 32

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une fonction scalaire $f$ admettant des dérivées partielles sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les deux affirmations suivantes :

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \forall\, t > 0,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y); \tag{H}$$

$$\forall\, (x, y) \in \Omega,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y). \tag{H'}$$

32.1. Prouver que (H) $\Longrightarrow$ (H'). *On pourra dériver l'égalité par rapport à $t$.*

32.2. Prouver que (H') $\Longrightarrow$ (H). *On pourra étudier, à $X = (x, y)$ fixé, la fonction $G_X(t) = \frac{1}{t^\alpha} f(tx, ty)$.*

# 6 Champ de vecteurs et intégrales curvilignes

## Exercice 33 ❄

Montrer les identités suivantes, en supposant les champs suffisamment réguliers :

33.1. $\nabla\wedge(\nabla f) = 0$ ;

33.2. $\nabla\cdot(\nabla f) = \Delta f$ ;

33.3. $\nabla\cdot(f\mathbf{U}) = \nabla f \cdot \mathbf{U} + f\,\nabla\cdot\mathbf{U}$ ;

33.4. $\nabla\cdot(\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}) = (\nabla\cdot\mathbf{V})\mathbf{U} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{U}$, où $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$ est la matrice de coordonnées $(\mathbf{U}\otimes\mathbf{V})_{ij} = U_iV_j$ ;

33.5. $\nabla\cdot({}^t\nabla\mathbf{U}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{U})$.

## Exercice 34

Soit $\mathbf{U}$ le champ de vecteurs

$$\mathbf{U}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{3x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 - x_2^4}{x_1^2x_2} \\ \dfrac{3x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - x_1^4}{x_1x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Justifier que sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{U}$ dérive d'un potentiel puis déterminer $f$ tel que $\mathbf{U} = \nabla f$.

## Exercice 35

On considère le champ de vecteur défini sur $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathbf{U}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x_1(x_2-1)}{(x_1^2+1)^2} \\ \dfrac{x_1^2}{x_1^2+1} \end{pmatrix}.$$

35.1. Calculer $\nabla\cdot\mathbf{U}(x_1,x_2)$.

35.2. Que vaut $\nabla\wedge\mathbf{U}(x_1,x_2)$ ?

35.3. Déterminer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{U} = \nabla f$.

35.4. Que vaut $\Delta f$ ?

## Exercice 36

Soient $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ les champs de vecteurs

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2^3 \\ 9x_1^3 \end{pmatrix}.$$

36.1. Déterminer la circulation de $\mathbf{U}$ le long du triangle passant par les points $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,1)$ (dans cet ordre). $(\frac{5}{3})$

36.2. Calculer la circulation de $\mathbf{V}$ le long de l'ellipse d'équation cartésienne $9x_1^2 + x_2^2 = 1$ orientée dans le sens trigonométrique. $(\pi)$

## Exercice 37

Soit $\mathbf{U}$ le champ de vecteurs

$$\mathbf{U}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 + x_2^2 - 1 \\ 2x_1x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}.$$

37.1. Calculer la circulation de $\mathbf{U}$ le long du segment de $A = (1, 0)$ vers $B = (0, 1)$. (1)

37.2. Déterminer si $\mathbf{U}$ est un champ de gradient et, le cas échéant, déterminer $f$ tel que $\mathbf{U} = \nabla f$.

37.3. Soit $\Gamma$ la courbe paramétrée par $x_1(t) = \cos^5 t$, $x_2(t) = \sin^4 t$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Calculer la circulation de $\mathbf{U}$ le long de $\Gamma$. (1)

## Exercice 38

Soit $\mathbf{U}$ le champ de vecteurs

$$\mathbf{U}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + x_2}{x_1^2(x_2 + 1)^2 + 1} \\ \dfrac{x_1}{x_1^2(x_2 + 1)^2 + 1} \end{pmatrix}.$$

On introduit les points $A(0, 1)$ et $B(1/2, 0)$.

38.1. Soit $\Gamma$ une courbe reliant $A$ à $B$. Justifier que la circulation de $\mathbf{U}$ le long de $\Gamma$ est indépendant de $\Gamma$. Déterminer sa valeur.

38.2. Que vaut la circulation de $\mathbf{U}$ le long d'une courbe fermée ?

## Exercice 39

On considère le champ $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}$.

39.1. Que vaut le rotationnel de $\mathbf{U}$ ?

39.2. Calculer la circulation de $\mathbf{U}$ le long du cercle de centre $O$ et de rayon 1 ? ($2\pi$)

39.3. Peut-on déduire de la question 39.1 que $\mathbf{U}$ est un champ de gradient ?

## Exercice 40

Soit $\mathbf{U}$ le champ de vecteurs

$$\mathbf{U}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2^3 \sin(x_1^2x_2^3) \\ x_1 + 3x_1^2x_2^2 \sin(x_1^2x_2^3) \end{pmatrix}.$$

40.1. Est-ce que $\mathbf{U}$ est un champ de gradient ?

40.2. Calculer la divergence du champ $\mathbf{U}$.

40.3. Évaluer la circulation de $\mathbf{U}$ le long de la courbe parabolique

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ x_2 = x_1^2\right\}$$

orientée dans le sens des $x_1$ croissants. ($\frac{5}{3} - \cos 1$)

# 7 Intégrales doubles

## Exercice 41 ❄

*Dans chacun des cas suivants, dessiner le domaine $\mathcal{D}$ et calculer l'intégrale*

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

41.1. $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,2]$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cos(x_2)$ ; $\left(\frac{\sin 2}{3}\right)$

41.2. $\mathcal{D} = [-1,1]^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)e^{x_1 - x_2}$ ; $(0)$

41.3. $\mathcal{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant x_2 \leqslant 2,\ 2x_2 \leqslant x_1 \leqslant 4\right\}$, $f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2}$ ; $\left(\frac{1-e^{-16}}{4}\right)$

41.4. $\mathcal{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 < 1,\ x_2 > 0,\ x_2^2 < x_1\right\}$, $f(x_1, x_2) = x_2^2 x_1$ ; $\left(\frac{2}{21}\right)$

41.5. $\mathcal{D}$ est le triangle de sommets $(0,0)$, $(2,2)$ et $(2,0)$, $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$. $\left(\frac{\ln 2}{4}\right)$

## Exercice 42

Calculer les intégrales suivantes puis commenter le résultat : $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$\int_0^1 \left( \int_{-1}^0 \frac{x_1 + x_2}{(x_1 - x_2)^3}\, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^0 \left( \int_0^1 \frac{x_1 + x_2}{(x_1 - x_2)^3}\, \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2.$$

## Exercice 43 ❄

Soit $\mathcal{D}$ la demi-couronne :

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant 0,\ 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\right\}.$$

Faire un dessin puis calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$. $\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

## Exercice 44

Tracer la demi-lune caractérisée par $\{x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\} \cap \{(x_1 - 2)^2 + x_2^2 \geqslant 4\}$. Calculer son aire et déterminer son centre d'inertie. $\left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3},\ \left(\frac{\frac{2}{3} - \frac{\pi}{24} - \frac{121\sqrt{3}}{48}}{\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}}, 0\right)\right)$

## Exercice 45

Soit $\mathcal{D}$ le domaine défini par

$$\mathcal{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x_2| \leqslant |x_1|,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\right\}.$$

45.1. Dessiner $\mathcal{D}$.

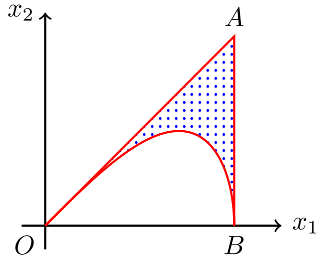
45.2. Calculer $(4\pi)$

$$\iint_{\mathcal{D}} (x_1^2 + x_2^2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

## Exercice 46

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points $A(2,2)$ et $B(2,0)$, ainsi que le domaine $\mathcal{D}$ représenté sur la figure ci-dessous. Son contour $\partial\mathcal{D}$ est composé des segments $[OA]$, $[OB]$ et de la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ :

$$\begin{cases} x_1(t) = 2\sin t, \\ x_2(t) = \sin(2t), \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$




46.1. Tracer le tableau du paramétrage de $\mathscr{C}$.

46.2. Justifier que les droites $(OA)$ et $(AB)$ sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}$.

46.3. Calculer l'aire de $\mathcal{D}$. ($\frac{2}{3}$)

## Exercice 47 ❄

*On note $\mathcal{D}$ le quart de disque $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\right\}$ et*

$$I = \iint_{\mathcal{D}} (3x_1^2 x_2^2 + 1)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

**Les 3 questions sont indépendantes les unes des autres.** ($\frac{9\pi}{32}$)

47.1. Calculer $I$ en utilisant la formule de Green-Riemann.

47.2. Calculer $I$ en effectuant un changement de variables en coordonnées polaires.

47.3. Calculer $I$ en appliquant le théorème de Fubini puis en effectuant le changement de variables $x_1 = \sin\theta$.

**On pourra utiliser les formules suivantes :** $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ **et**

$$W_2 = \frac{\pi}{4},\ W_3 = \frac{2}{3},\ W_4 = \frac{3\pi}{16},\ W_5 = \frac{8}{15},\ W_6 = \frac{5\pi}{32} \textbf{ pour } W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, \mathrm{d}x.$$

## Exercice 48

Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{x_1 x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$, où $\mathcal{D} = \left\{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \ :\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\right\}$. ($\frac{1-\ln 2}{4}$)

### Exercice 49 ❄

Soit $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_2^2 - x_1 \leqslant 0,\ x_1^2 - x_2 \leqslant 0\}$. En utilisant le changement de variables donné par $x_1 = u_1^2 u_2$ et $x_2 = u_1 u_2^2$, calculer l'intégrale ($\frac{e^8-1}{3}$)

$$\iint_{\mathcal{D}} \exp\left(\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

### Exercice 50

On considère le domaine $\mathcal{D} = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 \leqslant 1\big\}$. À l'aide du changement de variables $x_1 = u_1(1 - u_2)$ et $x_2 = u_1 u_2$, calculer l'intégrale ($-\frac{3}{2}$)

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \frac{x_2}{x_1}} \ln(1 - x_1 - x_2) \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

### Exercice 51

Soit $\mathcal{D} \subset [0,1]^2$ le domaine délimité par les courbes d'équations $x_2 = x_1^2$ et $x_1 = x_2^3$. On note alors $\mathscr{C}$ son bord orienté dans le sens direct.

51.1. Déterminer les points d'intersection des courbes composant $\mathscr{C}$ puis faire un dessin.

51.2. Calculer l'intégrale double ($\frac{1}{10}$)

$$\iint_{\mathcal{D}} x_1^2 \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

51.3. On note $I$ la circulation le long de $\mathscr{C}$ du champ de vecteurs $(x_1, x_2) \mapsto (1, x_1^3)$.

- (a) Calculer $I$ en utilisant des paramétrisations de $\mathscr{C}$. ($\frac{3}{10}$)
- (b) Déterminer $I$ en appliquant la formule de Green-Riemann.

# 8 Exercices de bilan

### Exercice 52

Soit $\mathbf{U}$ le champ de vecteur dans $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$\mathbf{U}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

52.1. Déterminer s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{U} = \nabla f$.

52.2. Calculer la circulation $I_1$ du champ $\mathbf{U}$ le long du segment de $A = (2, 1)$ vers $B = (1, 2)$.

52.3. Calculer la circulation $I_2$ du champ $\mathbf{U}$ le long de la branche d'hyperbole d'équation $x_1x_2 = 2$ orientée de $A$ vers $B$.

52.4. Dessiner la région $\mathcal{D}$ décrite ci-dessous et calculer son aire à l'aide du théorème de Green-Riemann

$$\mathcal{D} = \left\{(x_1, x_2) \in [0, +\infty[^2 \;\middle|\; x_1x_2 \geqslant 2, x_1 + x_2 \leqslant 3\right\}.$$

52.5. (a) Déterminer un paramétrage de la courbe $\Gamma$ orientée dans le sens direct d'équation implicite $x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0$, en supposant $x_2 = tx_1$.

(b) Étudier ce paramétrage et tracer la courbe.

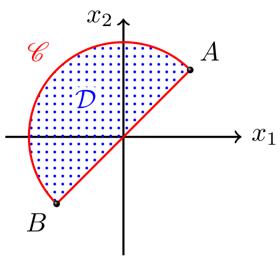
(c) Calculer la circulation de $\mathbf{U}$ le long de $\Gamma$.

(d) Quelle est la surface du domaine délimité par $\Gamma$ ?

### Exercice 53

On considère le demi-disque défini par $\mathcal{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\; x_1 \leqslant x_2\right\}$ et représenté ci-dessous. On introduit également la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) \longmapsto x_1^3 \exp(x_1x_2). \end{cases}$$




53.1. Donner les coordonnées cartésiennes et polaires des points $A$ et $B$.

53.2. Donner un paramétrage en coordonnées polaires du domaine $\mathcal{D}$.

53.3. Donner un paramétrage direct du contour $\mathscr{C}$.

53.4. (a) Rappeler l'aire du demi-disque $\mathcal{D}$.

(b) Redémontrer ce résultat en appliquant un théorème du cours.

(c) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de $\mathcal{D}$.

53.5. (a) Déterminer le gradient de la fonction $f$ que l'on notera $\mathbf{U} = \nabla f$.

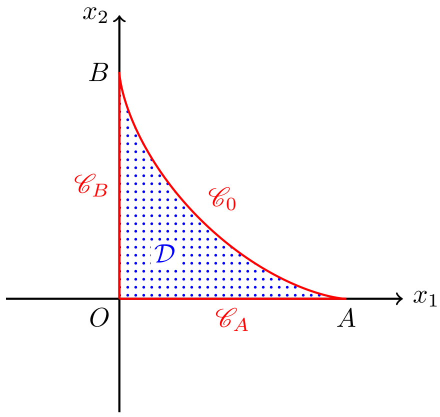
(b) Que vaut la circulation du champ $\mathbf{U}$ le long du contour $\mathscr{C}$ ?

(c) Calculer le laplacien de $f$.

53.6. (a) Justifier l'existence de la ligne de niveau 1 de la fonction $f$.

(b) Identifier cette ligne de niveau et la dessiner.

## Exercice 54




Sur la figure, le domaine $\mathcal{D}$ est délimité par la courbe $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 \cup \mathscr{C}_A \cup \mathscr{C}_B$ composée des segments $\mathscr{C}_A = OA$ et $\mathscr{C}_B = OB$, et de la courbe paramétrée reliant $A$ à $B$ définie par

$$\mathscr{C}_0 = \left\{ \mathbf{M}(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big) \;:\; x_1(t) = \cos^3 t,\; x_2(t) = \sin^3 t,\; t \in I = [0, \pi/2] \right\}.$$

54.1. Étudier la courbe paramétrée $\mathscr{C}_0$ et en déduire les coordonnées des points $A$ et $B$.

54.2. Calculer la longueur de la courbe $\mathscr{C}$.

54.3. Quelle est la surface du domaine $\mathcal{D}$ ?

54.4. Pour $t_0 \in I$ fixé, déterminer une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_0$ en $\mathbf{M}(t_0)$.

54.5. On note $\mathbf{N}_1(t_0)$ et $\mathbf{N}_2(t_0)$ les points d'intersection respectifs de $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

- (a) Faire un dessin.
- (b) Déterminer leurs coordonnées.
- (c) Prouver que la distance $\mathbf{N}_1(t_0)\mathbf{N}_2(t_0)$ est indépendante de $t_0$.
- (d) Comment relier cette réponse au problème d'une échelle qui glisse sur le sol ?

## Exercice 55

Dans le repère orthonormé $(O, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par $t \mapsto \mathbf{M}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ avec

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \qquad t \geqslant 0.$$

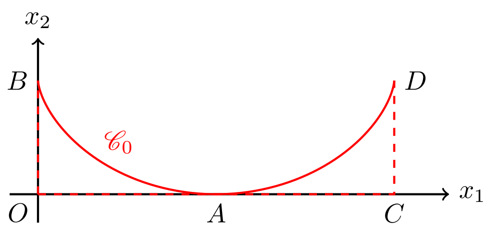
55.1.
- (a) Quelle est la relation entre $\mathbf{M}(\frac{1}{t})$ et $\mathbf{M}(t)$ ? Qu'en déduire pour la courbe ?
- (b) Prouver que le point $A$ de coordonnées $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$.
- (c) Donner le tableau de variations du paramétrage $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$.
- (d) Justifier qu'on peut considérer que la courbe $\mathscr{C}$ est fermée (ce que l'on fera par la suite).
- (e) *Soit $\mathcal{D}$ le domaine borné délimité par la courbe $\mathscr{C}$.* Calculer l'aire de $\mathcal{D}$.
- (f) Donner une ébauche de la courbe $\mathscr{C}$.

55.2. On introduit la fonction scalaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

- (a) Préciser le gradient, la matrice hessienne et le laplacien de la fonction $f$.
- (b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est incluse dans une ligne de niveau de la fonction $f$.

*On précise que $2^{1/3} \approx 1.3$, $2^{2/3} \approx 1.6$ et $2^{-1/3} \approx 0.8$ pour aider au traçage.*

## Exercice 56




Dans le repère orthonormé d'origine $O$, on considère la courbe paramétrée $\mathscr{C}_0$ reliant $B$ à $D$ définie par

$$\mathscr{C}_0 = \left\{\mathbf{M}(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big) \ : \ x_1(t) = t - \sin t,\ x_2(t) = 1 + \cos t,\ t \in I = [0, 2\pi]\right\}.$$

Le domaine $\mathcal{D}$, délimité par la courbe $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 \cup OB \cup OC \cup CD$, est représenté sur la figure.

56.1. (a) Étudier la courbe paramétrée $\mathscr{C}_0$ en traçant le tableau de variations du paramétrage $(x_1, x_2)$.

(b) En déduire les coordonnées des points $A$, $B$, $C$ et $D$. On précisera la valeur du paramètre $t$ correspondant aux positions $B$, $A$ et $D$.

(c) Dans quel sens est parcourue la courbe $\mathscr{C}_0$ ?

56.2. Calculer la longueur de la courbe $\mathscr{C}$.

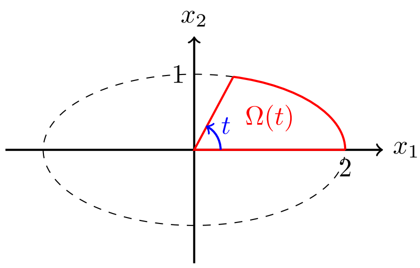
56.3. Quelle est la surface du domaine $\mathcal{D}$ ?

56.4. Déterminer la circulation $I_1$ le long de la branche de $\mathscr{C}_0$ reliant $B$ à $A$ du champ de vecteurs

$$\mathbf{U}_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 57

On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ (en pointillé sur la figure) d'équation cartésienne : $\dfrac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1$.




Soit $\Phi$ l'application de coordonnées elliptiques définie sur $[0,1] \times [0, 2\pi]$ par : $\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} 2r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$.

Pour $t \in ]0, 2\pi]$ fixé, on désigne par $\Omega(t)$ la portion d'ellipse délimitée en coordonnées elliptiques par $\theta \in [0, t]$.

57.1. Quelle est l'image de $[0,1] \times [0, 2\pi]$ par l'application $\Phi$ ?

57.2. Déterminer la jacobienne de $\Phi$ puis son déterminant.

57.3. En déduire l'aire de $\Omega(t)$.

57.4. Calculer les coordonnées $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ du centre d'inertie $\mathbf{M}(t)$ de $\Omega(t)$.

57.5. (Bonus) Tracer la courbe décrite par $\mathbf{M}(t)$ lorsque $t$ varie entre 0 et $2\pi$. *On pourra introduire* $\alpha_1 \in [\pi, 2\pi]$ *et* $\alpha_2 \in [\pi/2, \pi]$ *tels que* $\alpha_1 \cos\alpha_1 = \sin\alpha_1$ *et* $\alpha_2 \sin\alpha_2 = 1 - \cos\alpha_2$.

# 9 Dimension 3

## Exercice 58

Démontrer les identités suivantes, en supposant les champs suffisamment réguliers :

58.1. $\nabla\cdot(\boldsymbol{\nabla}\wedge \mathbf{U}) = 0$ ;

58.2. $\nabla\cdot(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\wedge \mathbf{U}) - \mathbf{U} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\wedge \mathbf{V})$ ;

58.3. $\boldsymbol{\nabla}\wedge(\boldsymbol{\nabla}\wedge \mathbf{U}) = \nabla(\nabla\cdot \mathbf{U}) - \Delta\mathbf{U}$ ;

58.4. $\boldsymbol{\nabla}\wedge(f\mathbf{U}) = f\,\boldsymbol{\nabla}\wedge \mathbf{U} + \nabla f \wedge \mathbf{U}$.

## Exercice 59

Soit $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la sphère $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et les contraintes $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ et $x_3 \geqslant 0$. Soit $\mathcal{S}$ le bord de $\mathcal{D}$ orienté selon la normale extérieure et décomposé en $\mathcal{S}_1$ pour la partie sphérique et $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}_1$ pour les parties planes. On note $\mathbf{U}$ le champ de vecteurs $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^3, x_2^3, x_3^3)$.

59.1. Faire un dessin.

59.2. Calculer le volume de $\mathcal{D}$.

59.3. Calculer le flux de $\mathbf{U}$ à travers $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ puis $\mathcal{S}$.

59.4. Déterminer les aires de $\mathcal{S}_1$ et de $\mathcal{S}_2$.

## Exercice 60

Soit $\mathcal{D}$ le domaine délimité par les surfaces d'équation $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ et $x_3 = 4 - 3x_1^2 - 3x_2^2$.

60.1. Quelle est l'intersection des deux surfaces ?

60.2. Déterminer le volume de $\mathcal{D}$.

60.3. Calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{D}} (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)\, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

## Exercice 61

On appelle $\mathcal{C}$ le cône tronqué dans $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$z^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \qquad \text{(latérale)}$$

complété par la surface

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 1,\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leqslant 1 \right\}. \qquad \text{(supérieure)}$$

61.1. Faire un dessin dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

61.2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ avec le plan d'équation $y = 0$.

61.3. On note $\mathcal{K}$ le domaine borné de $\mathbb{R}^3$ délimité par $\mathcal{C}$. On a donc :

$$\mathcal{K} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in [0, 1],\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leqslant z^2 \right\}.$$

(a) Étant donné le paramétrage suivant de la surface latérale du cône $\mathcal{C}$,

$$\begin{cases} x(u, v) = 3u \cos v, \\ y(u, v) = 2u \sin v, \qquad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi], \\ z(u, v) = u, \end{cases}$$

donner les coordonnées du vecteur unitaire $\overrightarrow{n}_{\text{lat}}(u, v)$ normal à la surface latérale et extérieur à $\mathcal{K}$.

(b) Sans calcul, déterminer les coordonnées du vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}_{\text{sup}}(u, v)$ à la surface supérieure.

(c) En déduire le volume de $\mathcal{K}$.

61.4. En utilisant un changement de variables, calculer les coordonnées du centre de gravité de $\mathcal{K}$.

61.5. En appliquant la formule de Green-Ostrogradsky, déterminer la valeur du flux à travers $\mathcal{C}$ du champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ xz \end{pmatrix}.$$