Examen

L'examen est prévu pour une durée de 1 heure 30. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits. Les exercices sont indépendants. Une attention particulière sera portée à la rigueur des réponses.

Exercice 1 *On considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée dans un repère orthonormé par*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \overline{\mathbf{M}}(t) = \begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \overline{x}_1(t) = \frac{t^3+t}{1+t^4} \text{ et } \overline{x}_2(t) = \frac{t^3-t}{1+t^4}.$$

On note également $\boxed{\theta = \sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 1.93}$. On introduit enfin la fonction f définie par

$$f(x_1, x_2) = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - (x_1^2 - x_2^2).$$

On admet les identités suivantes :

$$1 + 3t^2 - 3t^4 - t^6 = (1-t^2)(1+4t^2+t^4), \tag{1a}$$

$$1 - 3t^2 - 3t^4 + t^6 = (1+t^2)(t^2-\theta^2)\left(t^2 - \frac{1}{\theta^2}\right). \tag{1b}$$

1.1. Description de la courbe $\mathscr{C}$

(a) La courbe possède-t-elle des asymptotes ou des branches paraboliques ?

Correction : Les fonctions coordonnées $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$. De plus, on vérifie que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \overline{x}_1(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \overline{x}_2(t) = 0.$$

On en déduit que les deux fonctions coordonnées sont bornées sur $\mathbb{R}$. Il n'existe donc ni asymptote ni branche parabolique.

Remarques : Le concept d'asymptote et de branche parabolique n'a pas été compris du tout. Les fonctions x_1 et x_2 peuvent présenter des asymptotes en $\pm\infty$ en tant que fonctions d'une variable mais ce n'était pas l'objet de la question. Pour qu'une courbe paramétrée présente une asymptote ou une branche parabolique, il faut qu'au moins une des deux fonctions coordonnées tende vers $\pm\infty$, ce qui n'était pas le cas ici.

(b) Calculer, pour $t \in [0, +\infty[$, $\overline{\mathbf{M}}(-t)$, puis, pour $t \in]0,1[$, $\overline{\mathbf{M}}\left(\frac{1}{t}\right)$. En déduire les symétries de la courbe et le fait que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0,1]$.

Correction : Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on vérifie que $\overline{\mathbf{M}}(-t) = -\overline{\mathbf{M}}(t)$. Ainsi, la courbe pour $t \in \mathbb{R}_-$ se déduit de la courbe pour $t \in \mathbb{R}_+$ par une symétrie centrale de centre O. On réduit donc l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}_+$.

De même, pour $t \in]0,1]$, on a :

$$\overline{x}_1\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^4} + 1} = \frac{\frac{t^2+1}{t^3}}{\frac{t^4+1}{t^4}} = \frac{t^3+t}{t^4+1} = \overline{x}_1(t)$$

et $\overline{x}_2(\frac{1}{t}) = -\overline{x}_2(t)$. La courbe pour $t \in [1, +\infty[$ se déduit donc de la courbe pour $t \in]0,1]$ par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On réduit donc l'intervalle d'étude à $[0,1]$.

Remarques : Deux difficultés ont été recensées pour cette question : d'une part, nombre d'étudiants ont fait des erreurs de calculs dans $\mathbf{M}(-t)$ et dans $\mathbf{M}(\frac{1}{t})$. En particulier, le calcul de $(-t)^3$ a donné lieu à des réponses pour le moins surprenantes… Pour rappel, $(-t)^3 = (-1)^3 t^3 = -t^3$ mais certainement pas $-t$ comme dans beaucoup de copies.

D'autre part, le lien entre les résultats du calcul et la réduction de l'intervalle d'étude n'est globalement pas maîtrisé.

(c) *On pose* $\alpha = \overline{x}_1(\theta)$ *et* $\beta = \overline{x}_2(\theta)$. Sachant que $\theta^4 = 4\theta^2 - 1$, déterminer des expressions algébriques simplifiées de α^2 et β^2. En déduire $\overline{\mathbf{M}}(\frac{1}{\theta})$.

Correction : On a : $\alpha = \overline{x}_1(\theta) = \frac{\theta(\theta^2+1)}{\theta^4+1} = \frac{\theta(\theta^2+1)}{4\theta^2} = \frac{1}{4}\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right) > 0$. D'où

$$\alpha^2 = \frac{1}{16}\left(\theta^2 + \frac{1}{\theta^2} + 2\right) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \implies \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

car $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$. De même :

$$\beta = \frac{1}{4}\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right) > 0 \text{ et } \beta^2 = \frac{1}{8} \implies \beta = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Par la symétrie axiale citée précédemment, $\mathbf{M}(\frac{1}{\theta}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$.

(d) Pour $t_0 \in [0,1]$, déterminer un vecteur tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en $\overline{\mathbf{M}}(t_0)$. En déduire les points en lesquels la tangente est horizontale ou verticale.

Correction : Tout vecteur tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en $\overline{\mathbf{M}}(t_0)$ est dirigé par le vecteur $\overline{\mathbf{M}}'(t_0)$ lorsque ce dernier est non nul. On a :

$$\begin{aligned} \overline{x}_1'(t) &= \frac{(1+t^4)(1+3t^2) - 4t^3(t+t^3)}{(1+t^4)^2} = \frac{1+3t^2-3t^4-t^6}{(1+t^4)^2} \overset{(1a)}{=} \frac{(1-t^2)(1+4t^2+t^4)}{(1+t^4)^2} \\ \overline{x}_2'(t) &= -\frac{1-3t^2-3t^4+t^6}{(1+t^4)^2} \overset{(1b)}{=} -\frac{(1+t^2)(t^2-\theta^2)\left(t^2-\frac{1}{\theta^2}\right)}{(1+t^4)^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ainsi, une tangente verticale correspond à $\overline{x}_1'(t_0) = 0$ et $\overline{x}_2'(t_0) \neq 0$, ce qui donne, dans $[0,1]$, $t_0 = 1$. De même, une tangente horizontale correspond à $\overline{x}_1'(t_0) \neq 0$ et $\overline{x}_2'(t_0) = 0$, ce qui donne, dans $[0,1]$, $t_0 = \frac{1}{\theta}$.

Remarques : Très peu d'étudiants ont fait un calcul correct des dérivées. Ce n'était pourtant que des fonctions rationnelles... Cela traduit un manque de pratique de calculs concrets. De plus, le sujet comportait des indications avec (1a) et (1b).

Il y a par ailleurs eu beaucoup d'inversion entre les caractéristiques d'une tangente verticale et d'une tangente horizontale.

(e) Donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en $\overline{\mathbf{M}}(0)$.

Correction : La tangente à $\mathscr{C}$ en $\overline{\mathbf{M}}'(0)$ est dirigée par $\overline{\mathbf{M}}'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Une équation cartésienne de cette tangente est donc $x_2 = -x_1$.

Remarques : Beaucoup d'étudiants ont donné une équation paramétrique plutôt que cartésienne mais les points ont tout de même été attribués.

(f) Établir le tableau de variations du paramétrage $\overline{\mathbf{M}}$ sur $[0,1]$.

Correction : Compte-tenu des expressions (2) de $\overline{x}_1'$ et de $\overline{x}_2'$, on déduit le tableau suivant sur $[0,1]$.

t	0		$\frac{1}{\theta}$		1
$\overline{x}_1'(t)$		$+$		$+$	0
$\overline{x}_1$	0	$\nearrow$			1
$\overline{x}_2$	0	$\searrow$	$-\beta$	$\nearrow$	0
$\overline{x}_2'(t)$		$-$	0	$+$	
$\frac{\overline{x}_2'(t)}{\overline{x}_1'(t)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$

Remarques : Malgré les indications du sujet et pour les rares étudiants ayant obtenu les bonnes expressions des dérivées, l'analyse du signe des numérateurs a été laborieuse...

(g) Dessiner sur la figure 1 les tangentes déterminées dans les questions 1.1d et 1.1e puis tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans son intégralité. *Pour information,* $\alpha \approx 0.61$ *et* $\beta \approx 0.35$.

Correction : Voir figure 1, page 6.

Remarques : Les tangentes aident au tracé de la courbe. Certains étudiants ont tracé la bonne courbe avec le mauvais tableau de variations à la question précédente.

(h) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ est fermée.

Correction : Tout d'abord, notons que la courbe est continue car les coordonnées $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, par symétrie d'axe (Ox_1), on constate que la courbe est fermée car

$$\overline{\mathbf{M}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{t\to+\infty} \overline{\mathbf{M}}(t) = \lim_{t\to-\infty} \overline{\mathbf{M}}(t).$$

(i) La courbe est-elle orientée dans le sens direct ou dans le sens indirect ?

Correction : La courbe $\mathscr{C}$ est orientée dans le sens direct car $\overline{\mathbf{M}}'(t_0)^\perp = \begin{pmatrix} -\overline{x}_2'(t_0) \\ \overline{x}_1'(t_0) \end{pmatrix}$ pointe vers l'intérieur du domaine.

(j) Simplifier l'expression de $\mathcal{P}(t) = \overline{x}_1(t)\overline{x}_2'(t) - \overline{x}_1'(t)\overline{x}_2(t)$.

Correction : Après simplifications, on obtient :

$$\mathcal{P}(t) = \frac{-(t^3+t)(1-3t^2-3t^4+t^6)-(1+3t^2-3t^4-t^6)(t^3-t)}{(1+t^4)^3} = \frac{4t^3}{(1+t^4)^2}.$$

Remarques : Là encore, un manque de pratique sur les questions calculatoires...

(k) En déduire l'aire du domaine compris à l'intérieur de la courbe $\mathscr{C}$.

Correction : Notons $\mathcal{D}$ le domaine compris à l'intérieur de la courbe $\mathscr{C}$ composé des domaines $\mathcal{D}_+$ et $\mathcal{D}_-$ correspondant respectivement au paramétrage pour $t \in [0, +\infty[$ et $t \in]-\infty, 0]$. Par symétrie, les surfaces de $\mathcal{D}_+$ et de $\mathcal{D}_-$ sont égales. De plus, par application du théorème de Green-Riemann appliqué au domaine sans trou $\mathcal{D}_+$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_+$ orientée dans le sens direct, en posant $\mathbf{U}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$|\mathcal{D}_+| = \iint_{\mathcal{D}_+} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{\mathscr{C}_+} \mathbf{U} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathbf{M}} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{4t^3}{(1+t^4)^2}\mathrm{d}t$$

$$\overset{(u=t^4)}{=} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+u}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

En conclusion, $|\mathcal{D}| = 2|\mathcal{D}_+| = 1$.

(l) Simplifier les expressions de $\mathcal{A}(t) = \overline{x}_1(t)^2 + \overline{x}_2(t)^2$ et de $\mathcal{S}(t) = \overline{x}_1(t)^2 - \overline{x}_2(t)^2$.

Correction : Après simplifications, il vient :

$$\mathcal{A}(t) = \frac{2t^2}{1+t^4} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(t) = \frac{4t^4}{(1+t^4)^2} = \mathcal{A}(t)^2. \tag{3}$$

1.2. **Interprétation** : *on note $\mathscr{L}$ la ligne de niveau 0 de la fonction f.*

(a) Calculer le gradient et le laplacien de la fonction f.

Correction : Le gradient de la fonction f est donné par :

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x_1(x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}) \\ x_2(x_1^2+x_2^2+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

On en déduit le laplacien :

$$\Delta f(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 16(x_1^2+x_2^2) = 0.$$

Remarques : La définition du gradient est globalement bien assimilée même s'il y a eu des erreurs de calculs (sur une fonction polynomiale...). En revanche, une copie sur deux présentait un laplacien sous forme de vecteur et non de scalaire.

(b) Prouver que la courbe $\mathscr{C}$ est incluse dans $\mathscr{L}$.

Correction : Évaluons la fonction f le long de la courbe $\mathscr{C}$. On a :

$$f\big(\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t)\big) = \mathcal{A}(t)^2 - \mathcal{S}(t) = 0$$

d'après (3). Ainsi, tout point $\overline{\mathbf{M}}(t) \in \mathscr{L}$ ce qui montre que $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}$.

Remarques : Beaucoup de copies ont proposé le bon raisonnement sans pour autant arriver au bout du calcul. D'autres ont constaté que $\mathbf{M}(0)$ appartenait bien à $\mathscr{L}$ et en ont déduit abusivement que pour tout t, $\mathbf{M}(t) \in \mathscr{L}$.

(c) Justifier l'existence d'une fonction φ définie dans un voisinage $\mathcal{I}$ de α telle que la courbe $\mathscr{L}$ soit confondue localement avec la courbe d'équation cartésienne $x_2 = \varphi(x_1)$.

Correction : D'après la question précédente, le point $\overline{\mathbf{M}}(\theta) = (\alpha,\beta) \in \mathscr{L}$. De plus, on vérifie que

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\alpha,\beta) = 4\beta\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{2}\right) > 0.$$

La fonction f admet des dérivées partielles continues au voisinage de (α,β) et $f(\alpha,\beta) = 0$. D'où, par le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle $I \ni \alpha$ et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tels que $\varphi(\alpha) = \beta$ et, pour tout $x \in I$,

$$f\big(x, \varphi(x)\big) = 0. \tag{4}$$

En l'occurence, $I =]1, +\infty[$ car $\mathscr{C}$ admet une tangente verticale en $\overline{\mathbf{M}}(1)$.

Remarques : Certains connaissaient l'énoncé du théorème des fonctions implicites (sans toujours citer le nom du théorème) mais l'ont appliqué au point $(0,1)$ qui n'appartient pas à $\mathscr{L}$! On ne pouvait pas non plus l'appliquer au point $(1,0)$, qui est pourtant bien sur $\mathscr{L}$ mais qui correspond à l'annulation de la seconde dérivée partielle.

Beaucoup de copies ont conclu à l'existence de φ telle que $x_2 = \varphi(x_1)$ en oubliant de préciser $f\big(x_1, \varphi(x_1)\big) = 0$!

(d) De quelle équation différentielle la fonction φ est-elle solution ?

Correction : En dérivant (4) par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial x_2}(x, \varphi(x)) = 0,$$

soit :

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x, \varphi(x))} = -\frac{x}{\varphi(x)} \frac{x^2 + \varphi(x)^2 - \frac{1}{2}}{x^2 + \varphi(x)^2 + \frac{1}{2}}, \tag{5}$$

muni de la condition initiale $\varphi(\alpha) = \beta$.

(e) Que valent $\varphi(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$?

Correction : D'après ce qui précède, $\varphi(\alpha) = \beta \approx 0.35$ et d'après (5),

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2}}{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{2}} = 0.$$

(f) **Bonus** : *on pose* $\psi(x) = x^2 + \varphi(x)^2 + \frac{1}{2}$. De quelle EDO la fonction ψ est-elle solution ? En déduire l'expression de la fonction φ.

Correction : De la définition de ψ, on déduit que :

$$\psi'(x) = 2x + 2\varphi'(x)\varphi(x) = 2x\left(1 - \frac{x^2 + \varphi(x)^2 - \frac{1}{2}}{x^2 + \varphi(x)^2 + \frac{1}{2}}\right) = \frac{2x}{\psi(x)}.$$

D'où $2\psi'(x)\psi(x) = 4x$, soit, en intégrant entre x et α :

$$\psi(x)^2 - \psi(\alpha)^2 = 2(x^2 - \alpha^2) \implies \psi(x) = \sqrt{1 + 2(x^2 - \alpha^2)}$$

par positivité de la fonction ψ. On revient ensuite à la fonction (positive) φ :

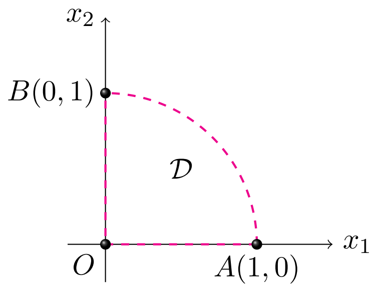
$$\varphi(x) = \sqrt{\sqrt{2x^2 + \frac{1}{4}} - x^2 - \frac{1}{2}}.$$

On vérifie que $\varphi(\alpha) = \beta$ et $\varphi(1) = 0$.

Exercice 2 *On considère le quart de disque de rayon* 1 *défini par*

$$\mathcal{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\right\}$$

et tracé sur la figure ci-dessous.



2.1. Exprimer le domaine $\mathcal{D}$ en termes de coordonnées polaires.

Correction : Le domaine $\mathcal{D}$ se décrit également : $\mathcal{D} = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[,\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

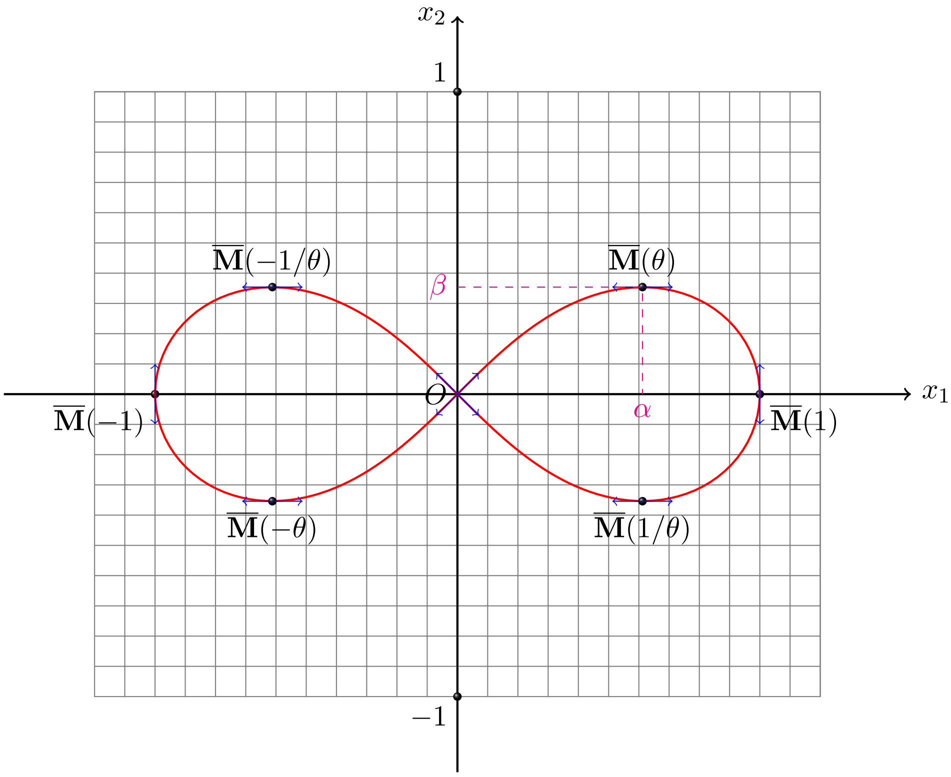


FIGURE 1 – Tracé de la courbe de $\mathscr{C}$

2.2. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ ainsi que le périmètre de son contour.

Correction : Par un raisonnement géométrique, comme la surface et le périmètre d'un disque de rayon 1 valent π et 2π, la surface et le périmètre du quart de disque sont donnés respectivement par $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}+2$.

Remarques : Cette question pouvait donc être traitée avec un raisonnement purement géométrique. On pouvait aussi y répondre en appliquant le théorème de Green-Riemann.

Dans le calcul du périmètre, beaucoup ont oublié les segments OA et OB.

2.3. Déterminer les coordonnées du centre d'inertie du domaine $\mathcal{D}$.

Correction : Par le théorème de changement de variables (des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires), on a :

$$\iint_{\mathcal{D}} x_1 \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} (r\cos\theta)\, r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \overset{(Fubini)}{=} \left(\int_0^1 r^2 \, \mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta\right) = \frac{1}{3}.$$

D'où, l'abscisse du centre d'inertie est donné par :

$$x_1^S = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x_1 \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2}{\iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3\pi}.$$

Par symétrie du domaine en (x_1, x_2), on en déduit que $x_2^S = x_1^S$.

2.4. *Soit* $\mathbf{U}$ *un champ de vecteurs régulier défini sur le domaine* $\mathcal{D}$. Donner par l'application du théorème de *Green-Riemann* une autre expression, à l'aide des composantes U_1 et U_2 du champ $\mathbf{U}$, de l'intégrale suivante

$$\iint_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \mathbf{U}(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

Correction : Commençons par donner un paramétrage du contour $\mathscr{C}$ de $\mathcal{D}$ dans le sens direct :

$$\begin{aligned}\mathscr{C} &= OA + \widehat{AB} + BO\\ &= \{(t,0),\ t\in[0,1]\} \cup \left\{(\cos t, \sin t),\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} \cup \{(0, 1-t),\ t\in[0,1]\}\\ &= \bigcup_{k\in\{1,2,3\}} \{\mathbf{M}_k(t),\ t\in\mathcal{I}_k\}\,.\end{aligned}$$

Ainsi, l'application du théorème de Green-Riemann (aussi appelé Green-Ostrograsky dans ce cas précis) donne :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} \nabla\cdot\mathbf{U}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_{\mathscr{C}} \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \sum_{k\in\{1,2,3\}} \int_{\mathcal{I}_k} \mathbf{U}\big(\mathbf{M}_k(t)\big)\cdot\begin{pmatrix}\overline{x}_2'(t)\\ -\overline{x}_1'(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^1 [U_1(0,1-t)+U_2(t,0)]\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} [U_1(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta + U_2(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta]\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Remarques : Comme souvent, les bords OA et OB du domaine $\mathcal{D}$ ont été oubliés dans le calcul. Par ailleurs, cette question comportait un piège puisque le théorème de Green-Riemann s'applique à des intégrales de la forme

$$\iint_{\mathcal{D}} \nabla\wedge\mathbf{V}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

impliquant un rotationnel et non une divergence. Toutefois, en dimension 2, on peut réinterpréter une divergence comme un rotationnel :

$$\nabla\cdot\mathbf{U} = \nabla\wedge\mathbf{V} \quad \text{avec} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix}-U_2\\ U_1\end{pmatrix},$$

ce qui se traduit par le théorème de Green-Ostrogradsky vu en cours comme corollaire du théorème de Green-Riemann.