Partiel

Le partiel est prévu pour une durée de 1 heure 30. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits. Les questions du problème sont le plus souvent indépendantes et peuvent être résolues en admettant les résultats des questions précédentes.

En bleu, la correction de chaque question.

On s'intéresse ici à un modèle de dynamique de population de type prédateurs-proies (parfois appelé *modèle de May*, 1972). x et y représentant les densités de population, leur évolution est donnée par

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t)\big(1 - x(t)\big) - \dfrac{x(t)y(t)}{y(t)+3}, \\ y'(t) = -y(t) + \dfrac{x(t)y(t)}{y(t)+3}, \end{cases} \tag{1}$$

avec pour données initiales $x(t=0) = x_0 \in [0,1]$ et $y(t=0) = y_0 \in [0,1]$.

1 Interprétation

1.1. Retrouver qui, de x ou de y, représente la densité de proies.

Correction : Le signe des termes d'interaction entre les deux populations indique la population de proies : le terme $-\frac{xy}{y+3}$ montre que la co-existence des deux populations ($x > 0$ et $y > 0$) tend à faire diminuer la population x. On en déduit que x désigne la population de proies et y celle de prédateurs.

1.2. Donner une interprétation de chacun des termes présents dans le système (1).

Correction : Dans l'équation sur la population de proies :

- Le terme $2x(1-x)$ représente la dynamique interne de la population de proies. En l'absence de prédateurs ($y = 0$), c'est une équation différentielle ordinaire de type logistique (ou encore modèle de *Verhulst*).
- Le terme $-\frac{xy}{y+3}$ est le terme de prédation. On remarque que c'est un terme borné par rapport à y : lorsque la population de prédateurs augmente, le terme de prédation tend vers $-x$, ce qui traduit un phénomène de saturation à l'efficacité des prédateurs.

Dans l'équation sur la population de prédateurs :

- Le terme $-y$ représente la dynamique interne de la population de prédateurs. En l'absence de proies ($x = 0$), c'est une décroissance exponentielle.
- Le terme $+\frac{xy}{y+3}$ est le terme de prédation qui permet à la population de se développer.

1.3. Quelle est la capacité maximale d'accueil de la population x ?

Correction : En l'absence de prédateurs ($y = 0$), la population de proies est régie par l'équation logistique $x' = 2x(1-x)$ dont on sait que la solution tend vers son maximum 1 qui est ainsi la capacité maximale d'accueil.

1.4. Comment aurions-nous pu modéliser un phénomène de saturation sur la quantité de proies mangées par un prédateur ?

Correction : Pour modéliser une saturation de la prédation parce que le prédateur ne peut manger une quantité infinie de proies, on aurait pu remplacer le terme $\pm\frac{xy}{y+3}$ par un terme de la forme $\pm\frac{xy}{x+k}$ de sorte que lorsque le nombre de proies croît, le terme de prédation est borné et tend vers $\pm y$.

2 Analyse du système (1)

2.1. Écrire le système (1) sous la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = F\big(x(t), y(t)\big). \tag{2}$$

Correction : Le modèle (1) se met sous la forme (2) avec F définie par :

$$F : (X,Y) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[\longmapsto \begin{pmatrix} F_1(X,Y) \\ F_2(X,Y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2X(1-X) - \dfrac{XY}{Y+3} \\ -Y + \dfrac{XY}{Y+3} \end{pmatrix}.$$

2.2. Déterminer la jacobienne du champ F.

Correction : La fonction F est différentiable sur $(\mathbb{R}_+)^2$ avec pour jacobienne :

$$\operatorname{Jac} F(X,Y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial X} & \dfrac{\partial F_1}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial X} & \dfrac{\partial F_2}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4X - \dfrac{Y}{Y+3} & -\dfrac{3X}{(Y+3)^2} \\ \dfrac{Y}{Y+3} & -1 + \dfrac{3X}{(Y+3)^2} \end{pmatrix}.$$

2.3. Justifier l'existence d'une solution maximale.

Correction : La fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le domaine $(\mathbb{R}_+)^2$ en tant que fonction rationnelle. On déduit du théorème de *Cauchy-Lipschitz* que le système autonome (2) muni de la condition initiale $(x,y)(0) = (x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+)^2$ admet une unique solution maximale $t \in J \mapsto \big(\hat{x}(t), \hat{y}(t)\big)$ pour un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ comprenant 0.

2.4. On s'intéresse dans cette question à la positivité des solutions.

(a) Dans le cas où $x_0 = 0$, quelle est la solution du modèle (1) ?

Correction : Si $x_0 = 0$, on vérifie que $t \mapsto (0, y_0 e^{-t})$ est solution de (1) et des conditions initiales $(0, y_0)$. Par l'unicité induite par le théorème de *Cauchy-Lipschitz*, on en déduit que c'est la seule.

(b) Dans le cas où $y_0 = 0$, vérifier que la solution est donnée par

$$\big(x(t), y(t)\big) = \left(\frac{x_0 e^{2t}}{1 - x_0 + x_0 e^{2t}}, 0\right).$$

Correction : Posons $\overline{x}$ la fonction définie par

$$\overline{x}(t) := \frac{x_0 e^{2t}}{1 - x_0 + x_0 e^{2t}}.$$

Cette fonction vérifie $\overline{x}(0) = x_0$ et

$$\overline{x}'(t) = \frac{2x_0(1-x_0)e^{2t}}{(1 - x_0 + x_0 e^{2t})^2} = 2\overline{x}(t)\big(1 - \overline{x}(t)\big).$$

Ainsi, $t \mapsto \big(\overline{x}(t), 0\big)$ est bien solution de (1) avec les données initiales $(x_0, 0)$. C'est la seule d'après le théorème de *Cauchy-Lipschitz*.

(c) En déduire la positivité des solutions x et y du modèle (1) pour $x_0 \geqslant 0$ et $y_0 \geqslant 0$.

Correction : Les cas $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$ ont été traités ci-dessus. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, il existe $t_1 > 0$ pour lequel $\hat{x}(t_1) = 0$ et $\hat{y}(t_1) = y_1 > 0$. On vérifie que $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : t \mapsto (0, y_1 e^{-(t-t_1)})$ est l'unique solution de (1) avec les conditions initiales $(\widetilde{x}, \widetilde{y})(0) = (0, y_1 e^{t_1})$. Cette solution vérifie également $(\widetilde{x}, \widetilde{y})(t_1) = (0, y_1)$. Or, par le théorème de *Cauchy-Lipschitz*, les trajectoires associées à un même système différentiel ne peuvent se couper, ce qui signifie que $(\hat{x}, \hat{y}) = (\widetilde{x}, \widetilde{y})$. En particulier, on a $\hat{x}(0) = \widetilde{x}(0) = 0 \neq x_0$ ce qui est absurde : il n'existe aucun temps pour lequel $\hat{x}$ s'annule.

On raisonne de même pour le cas où il existe $t_2 > 0$ tel que $\hat{x}(t_2) = x_2 > 0$ et $\hat{y}(t_2) = 0$. En conclusion, $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont strictement positives sur J.

2.5. On rappelle le lemme de *Grönwall* :

Lemme 1 (Grönwall) *Soit* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Soient* h *une fonction continue positive sur* $[a, b]$ *à valeurs réelles et une constante* $C > 0$ *telles que :*

$$h'(t) \leqslant Ch(t).$$

Alors la fonction h *vérifie l'estimation*

$$\forall\, a \leq t \leq b, \quad h(t) \leq h(a)e^{C(t-a)}.$$

En appliquant le lemme de *Grönwall* à la fonction $h(t) = x(t) + y(t)$, prouver que la solution est globale en temps.

Correction : D'après (1) et en utilisant la positivité de x et de y, on a :

$$\forall\, t \in J,\ h'(t) = x'(t) + y'(t) = 2x(t)\big(1 - x(t)\big) - y(t) = 2h(t) - 2x^2(t) - 3y(t) \leqslant 2h(t).$$

En appliquant le lemme de *Grönwall*, on en déduit

$$\forall\, t \in J,\ h(t) \leqslant h(0)e^{2t} = (x_0 + y_0)e^{2t}.$$

Comme x et y sont positives, on obtient pour tout $t \in J$

$$0 \leqslant x(t) \leqslant (x_0 + y_0)e^{2t} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y(t) \leqslant (x_0 + y_0)e^{2t}. \tag{3}$$

Si J était un intervalle borné, alors x et y tendraient vers $+\infty$ aux bornes de l'intervalle (principe d'explosion en temps fini) ce qui contredit les encadrements (3). En conclusion, $J = \mathbb{R}$ et les solutions sont globales en temps.

2.6. Montrer que le système (1) admet 4 points d'équilibre. Lesquels sont admissibles du point de vue biologique ?

Correction : Déterminons les couples (X, Y) qui vérifient $F(X, Y) = 0$. On a

$$F(X,Y) = 0 \iff \begin{cases} X\left(2(1-X) - \frac{Y}{Y+3}\right) = 0, \\ Y\left(-1 + \frac{X}{Y+3}\right) = 0. \end{cases}$$

On distingue les cas :

- $X = 0 \implies Y = 0$, ce qui donne le point d'équilibre $0, 0)$;
- $Y = 0 \implies X = 0$ ou $X = 1$. On obtient donc le point d'équilibre supplémentaire $(1, 0)$;
- Pour $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, on a $X = Y + 3$ puis $2X(1 - X) = X - 3$, soit $0 = 2X^2 - X - 3 = 2(X + 1)(X - \frac{3}{2})$. Les deux derniers points d'équilibre sont donc $(-1, -4)$ et $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$. Ces deux derniers cas ne sont pas admissibles car $Y < 0$, ce qui est contradictoire avec le fait que Y est une densité de population (donc positive).

2.7. Étudier la stabilité des deux points d'équilibre pertinents.

Correction : On s'intéresse à la stabilité des points d'équilibre $(0,0)$ et $(1,0)$. Pour cela, étudions les valeurs de la jacobienne $\mathrm{Jac}\, J$ en ces points :

$$\mathrm{Jac}\, J(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Jac}\, J(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Dans le premier cas, les valeurs propres sont de signes distincts (2 et -1) ce qui montre que $(0,0)$ est instable. Dans le second cas, les valeurs propres sont -2 et $-\frac{2}{3}$ donc strictement négatives. Ainsi, $(1,0)$ est asymptotiquement stable.

3 Méthode numérique de résolution

On cherche à approcher les solutions exactes $(\hat{x}, \hat{y})$ du modèle (1). On se donne un pas de temps $h > 0$ et on définit un maillage $t_n = nh$. On note $(x_n, y_n) \simeq \big(\hat{x}(t_n), \hat{y}(t_n)\big)$.

3.1. Écrire le schéma d'Euler explicite pour le modèle (1).

Correction : Le schéma d'Euler explicite appliqué au système (2) s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + hF(x_n, y_n) \iff \begin{cases} x_{n+1} = x_n \left[1 + h\left(2(1 - x_n) - \frac{y_n}{y_n+3}\right)\right], \\ y_{n+1} = y_n \left[1 + h\left(-1 + \frac{x_n}{y_n+3}\right)\right]. \end{cases}$$

3.2. Quel pourrait être un inconvénient associé à ce schéma ?

Correction : Le schéma d'Euler explicite est un schéma consistant à l'ordre 1, ce qui assure la convergence du schéma lorsque $h \to 0$. Cependant, il arrive généralement que le schéma ne soit stable que sous condition sur le pas de temps (h suffisamment petit), ce qui peut être restrictif en termes de temps de calcul.

3.3. Quel autre schéma pourriez-vous proposer ?

Correction : À l'instar des modifications du schéma d'Euler explicite pour le modèle de Lotka-Volterra, on peut procéder à des linéarisations pour impliciter certains termes, comme par exemple

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hx_{n+1}\left(2(1 - x_n) - \frac{y_n}{y_n+3}\right), \\ y_{n+1} = y_n + hy_{n+1}\left(-1 + \frac{x_n}{y_n+3}\right), \end{cases}$$

qui permettent toutefois de calculer x_{n+1} et y_{n+1} sans recourir à l'inversion d'une matrice.