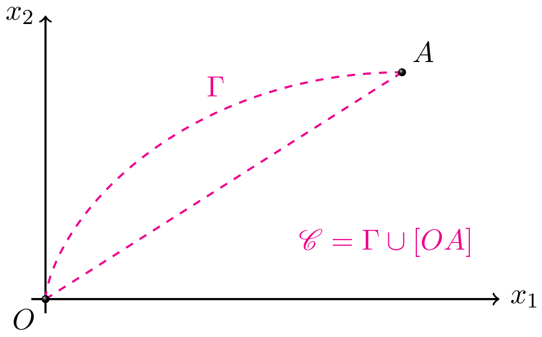
Partiel

Le partiel est prévu pour une durée de 1 heures 30. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits. Les exercices sont indépendants. Une attention particulière sera portée à la rigueur des réponses.

En bleu, la correction de chaque question. En rouge, les erreurs les plus fréquemment commises.

Exercice 1 *On considère la courbe $\mathscr{C}$ constituée du segment OA ainsi que de la courbe paramétrée Γ par*

$$t \in [0,\pi] \longmapsto \overline{\mathbf{M}}(t) = \begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{x}_1(t) = 2(t - \sin t), \\ \overline{x}_2(t) = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$



1.1. La courbe Γ admet-elle des points singuliers ? Si oui, préciser leur nature.

Correction : Les fonctions coordonnées $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$ sont dérivables sur $[0,\pi]$ avec

$$\overline{\mathbf{M}}'(t) = 2\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Un point $\overline{\mathbf{M}}(t_0)$ est dit singulier si $\overline{\mathbf{M}}'(t_0) = \mathbf{0}$. Ici, un point singulier vérifie $\cos t_0 = 1$ et $\sin t_0 = 0$, ce qui n'est vérifié dans $[0,\pi]$ que pour $t_0 = 0$. Ainsi, le point $\overline{\mathbf{M}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est singulier. Déterminons sa nature en effectuant un développement limité de $\overline{\mathbf{M}}$ au voisinage de $t = 0$:

$$\overline{x}_1(t) = 2\left[t - \left(t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\right)\right] = \frac{t^3}{3} + o(t^4),$$
$$\overline{x}_2(t) = 2\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{2!} + o(t^3)\right)\right] = t^2 + o(t^3),$$

D'où :

$$\overline{\mathbf{M}}(t) = \overline{\mathbf{M}}(0) + t^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + o(t^3)$$

ce qui permet d'affirmer que les entiers caractéristiques sont $(p = 2, q = 3)$. Le premier étant pair et le second impair, on en déduit que $\overline{\mathbf{M}}(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Remarques :

- De nombreuses confusions entre $\overline{\mathbf{M}}(t)$ et $\overline{\mathbf{M}}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$.
- Pour déterminer la nature d'un point singulier, on effectue un développement limité de $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$ et non de $\overline{x}_1'$ et $\overline{x}_2'$.
- La dérivée de la fonction $\sin$ est $\cos$ et non $-\cos$!

1.2. Dresser le tableau de variations du paramétrage $\overline{\mathbf{M}}$.

Correction :

t	0		π
$\overline{x}_1'(t)$	0	$+$	
$\overline{x}_1$	0	$\nearrow$	2π
$\overline{x}_2$	0	$\nearrow$	4
$\overline{x}_2'(t)$	0	$+$	0
$\frac{\overline{x}_2'(t)}{\overline{x}_1'(t)}$	$\Vert$	$+$	0

Remarques : Il n'y a aucune raison de faire apparaître $t = \pi/2$ dans le tableau, il ne s'y passe rien.

1.3. En déduire les coordonnées du point A.

Correction : Les deux fonctions coordonnées de la courbe paramétrée sont croissantes. Les deux extrémités de la courbe Γ sont donc $O = \overline{\mathbf{M}}(0)$ et $A = \overline{\mathbf{M}}(\pi) = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 4 \end{pmatrix}$.

Remarques : Quelques mots d'explication ne sont jamais de trop ...

1.4. Donner une équation paramétrique du segment OA de sorte que la courbe $\mathscr{C}$ soit orientée dans le même sens.

Correction : On a vu que la courbe Γ était orientée de O vers A. Ainsi, pour que la courbe $\mathscr{C}$ soit orientée dans le même sens, il faut que le segment $[OA]$ soit orienté de A vers O. On propose donc le paramétrage :

$$s \in [0,1] \longmapsto \widetilde{\mathbf{M}}(s) = sO + (1-s)A \ \text{ soit } \ \begin{cases} \widetilde{x}_1(s) = 2\pi(1-s), \\ \widetilde{x}_2(s) = 4(1-s). \end{cases}$$

Remarques : Très peu de prise en compte de l'orientation de $\mathscr{C}$. Ne pas oublier de spécifier le domaine d'appartenance du paramètre s : pour $s \in \mathbb{R}$, on décrit toute la droite ...

1.5. Calculer la longueur de la courbe $\mathscr{C}$.

Correction : On a $\mathrm{long}(\mathscr{C}) = \mathrm{long}(\Gamma) + \mathrm{long}(OA)$. On a d'une part

$$\mathrm{long}(OA) = \sqrt{(x_1^A - x_1^O)^2 + (x_2^A - x_2^O)^2} = 2\sqrt{4 + \pi^2}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \mathrm{long}(\Gamma) &= \int_0^\pi \left\| \overline{\mathbf{M}}'(t) \right\| \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sqrt{\overline{x}_1'(t)^2 + \overline{x}_2'(t)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\pi \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^\pi \sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -8\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 8 \end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité trigonométrique

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$$

pour $\theta = \frac{t}{2}$. En conclusion, $\mathrm{long}(\mathscr{C}) = 8 + 2\sqrt{4+\pi^2}$.

Remarques :

- La plupart du temps, seule la longueur de Γ est traitée, oubliant le segment OA.
- Le calcul de la longueur a donné lieu aux pires horreurs :
  - La primitive de $t \mapsto \sqrt{1-\cos t}$ n'est pas $t \mapsto (1-\cos t)^{3/2}$.
  - $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$
  - L'intégrale de la fonction nulle est nulle !

Exercice 2 *On considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée en coordonnées cartésiennes dans le repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ par*

$$t \in [0, 2\pi] \longmapsto \overline{\mathbf{M}}(t) = \begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{x}_1(t) = \cos t, \\ \overline{x}_2(t) = 2\sin t. \end{cases}$$

2.1. Étudier la courbe puis la tracer dans un repère orthonormé.

Correction : Appliquons la méthodologie vue en cours.

① Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $(2\pi - t) \in [0, 2\pi]$ et : $\overline{\mathbf{M}}(2\pi - t) = \begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ -\overline{x}_2(t) \end{pmatrix}$. Ainsi, la courbe présente une symétrie d'axe $O\mathbf{e}_1$ et on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$.

Pour tout $t \in [0, \pi]$, on a $(\pi - t) \in [0, \pi]$ et : $\overline{\mathbf{M}}(\pi - t) = \begin{pmatrix} -\overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix}$. Ainsi, la courbe présente une symétrie d'axe $O\mathbf{e}_2$ et on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$.

② Étudions l'existence de points multiples en résolvant $\overline{\mathbf{M}}(t_1) = \overline{\mathbf{M}}(t_2)$.
On en déduit que $\cos t_1 = \cos t_2 \iff t_1 = 2\pi - t_2$ et que $\sin t_1 = \sin t_2 \iff t_1 = \pi - t_2$, pour lesquelles il n'existe aucune solution.

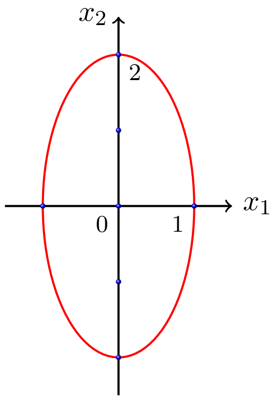
Passons ensuite à l'existence de points singuliers. Les fonctions coordonnées sont dérivables avec $\overline{\mathbf{M}}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$. On cherche ainsi $t_0 \in [0, \pi/2]$ tel $\overline{\mathbf{M}}'(t_0) = 0 \iff \sin t_0 = \cos t_0 = 0$: il n'existe aucun point singulier.

③ Les deux fonctions coordonnées étant bornées dans $[-2, 2]$, il n'y a ni asymptotes, ni branches paraboliques.

④ Le signe de $\overline{x}_1'$ et $\overline{x}_2'$ permet d'établir le tableau suivant :

t	0		$\pi/2$
$\overline{x}_1'(t)$	0	$-$	
$\overline{x}_1$	1	$\searrow$	0
$\overline{x}_2$	0	$\nearrow$	2
$\overline{x}_2'(t)$		$+$	0
$\frac{\overline{x}_2'(t)}{\overline{x}_1'(t)}$	$\Vert$	$-$	0

⑤ À partir du tableau de variations et en tenant compte des symétries, on obtient la figure suivante.



Remarques :

- Le lien entre symétries et réduction de l'intervalle d'étude n'est globalement pas compris. En particulier, beaucoup ont étudié $\overline{\mathbf{M}}(-t)$ alors que si $t \in [0, 2\pi]$, $-t \notin [0, 2\pi]$!
- La méthodologie donnée en cours pour analyser une courbe paramétrée n'a pas toujours été respectée.
- Beaucoup d'affirmations sans justification.
- Le tracé n'est pas toujours corrélé avec le tableau ...ni avec la suite de l'exercice (on apprend que la courbe est incluse dans une ellipse).

2.2. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ est incluse dans l'ellipse d'équation cartésienne $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} = 1$.

Correction : Introduisons la fonction $f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x_1^2 + \frac{x_2^2}{4}$. L'ellipse correspond donc à l'ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x_1, x_2) = 1\}$.

On vérifie que pour tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$f\big(\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t)\big) = \overline{x}_1(t)^2 + \frac{\overline{x}_2(t)^2}{4} = \cos^2 t + \frac{4\sin^2 t}{4} = 1.$$

Ainsi, tout point $\overline{\mathbf{M}}(t)$ appartient à l'ellipse.

2.3. Pour quelles valeurs du paramètre t la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ a-t-elle un coefficient directeur égal à -2 ?

Correction : La tangente à $\mathscr{C}$ en $\overline{\mathbf{M}}(t)$ a pour coefficient directeur $\frac{\overline{x}_2'(t)}{\overline{x}_1'(t)}$ car $\overline{\mathbf{M}}'(t)$ est tangent. On cherche donc à déterminer $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que

$$-2 = \frac{\overline{x}_2'(t_0)}{\overline{x}_1'(t_0)} = -2\frac{\cos t_0}{\sin t_0} \iff \sin t_0 = \cos t_0.$$

Les solutions à cette équation dans $[0, 2\pi]$ sont $t_1 = \frac{\pi}{4}$ et $t_2 = \frac{5\pi}{4}$.

Remarques :

- La fonction $\tan$ est définie par $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$, pas l'inverse.
- $\frac{3\pi}{4}$ vérifie $\sin t = -\cos t\dots$

2.4. Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique de la tangente en ces points.

Correction :

Méthode 1 Pour $t_1 = \frac{\pi}{4}$, un paramétrage de la tangente passant par $\overline{\mathbf{M}}(t_1)$ et dirigée par $\overline{\mathbf{M}}'(t_1)$ est donné par

$$s \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbf{N}_1(s) = \overline{\mathbf{M}}(t_1) + s\overline{\mathbf{M}}'(t_1) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(1-s) \\ \sqrt{2}(1+s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ Y_1(s) \end{pmatrix}.$$

En isolant s dans la première coordonnée, on obtient $s = 1 - \sqrt{2}X_1$ ce qui donne, injecté dans la deuxième coordonnée :

$$Y_1 = \sqrt{2}(1 + 1 - \sqrt{2}X_1) = -2X_1 + 2\sqrt{2}.$$

De la même manière pour $t_2 = \frac{5\pi}{4}$, un paramétrage de la tangente est donné par

$$s \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbf{N}_2(s) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-s) \\ -\sqrt{2}(1+s) \end{pmatrix}$$

et son équation cartésienne par

$$Y_2 = -2X_2 - 2\sqrt{2}.$$

Méthode 2 Pour $t_1 = \frac{\pi}{4}$, on sait que le coefficient directeur de la tangente est égal à -2. On cherche donc c de sorte que le point $\overline{\mathbf{M}}(t_1) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ soit sur la droite d'équation $Y_1 = -2X_1 + c$. On obtient $c = 2\sqrt{2}$. On en déduit un paramétrage de la droite :

$$s \in \mathbb{R} \longmapsto \widetilde{\mathbf{N}}_1(s) = \begin{pmatrix} s \\ -2s + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

De même, on a

$$Y_2 = -2X_2 - 2\sqrt{2}$$

puis

$$s \in \mathbb{R} \longmapsto \widetilde{\mathbf{N}}_2(s) = \begin{pmatrix} s \\ -2s - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Énoncer le théorème de Schwarz.

Correction : Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles à l'ordre 2. Pour $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \Omega$, si les dérivées secondes croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ sont continues, alors elles sont égales.

Remarques :

- Alors que le nom du théorème est donné dans le sujet, certains ont réussi à l'écorcher...
- La plupart des erreurs concernent l'écriture des dérivées partielles.

Exercice 4 Supposons que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ admette des dérivées partielles à l'ordre 2. Quelle est l'expression du laplacien de f ?

Correction : Pour une fonction scalaire admettant des dérivées partielles secondes en $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, le laplacien, égal à la trace de la matrice hessienne, vaut :

$$\Delta f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2).$$