Examen

L'examen est prévu pour une durée de 2 heures. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits. Les exercices sont indépendants. Il en est de même pour les questions à l'intérieur des exercices. Une attention particulière sera portée à la rigueur des réponses.

Exercice 1 *On considère le demi-disque représenté sur la figure 1 et défini par* $\mathcal{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, \ x_1 \leqslant x_2\right\}$*. On introduit également la fonction*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) \longmapsto x_1^3 \exp(x_1 x_2). \end{cases}$$

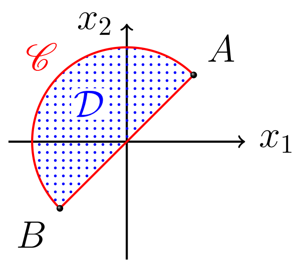

Figure 1 – Domaine $\mathcal{D}$ (en pointillés) de frontière $\mathscr{C}$ (en rouge)

1.1. Donner les coordonnées cartésiennes et polaires des points A et B.

1.2. Donner un paramétrage en coordonnées polaires du domaine $\mathcal{D}$.

1.3. Donner un paramétrage direct du contour $\mathscr{C}$.

1.4. (a) Rappeler l'aire du demi-disque $\mathcal{D}$.

(b) Redémontrer ce résultat en appliquant un théorème du cours.

(c) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de $\mathcal{D}$.

1.5. (a) Déterminer le gradient de la fonction f que l'on notera $\mathbf{U} = \nabla f$.

(b) Que vaut la circulation du champ $\mathbf{U}$ le long du contour $\mathscr{C}$?

(c) Calculer le laplacien de f.

1.6. (a) Justifier l'existence de la ligne de niveau 1 de la fonction f.

(b) Identifier cette ligne de niveau et la dessiner.

Exercice 2 *Soit* $\mathbf{U}$ *le champ de vecteurs défini sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_1^2 x_2 \end{pmatrix}.$$

2.1. Calculer la divergence et le rotationnel du champ de vecteurs $\mathbf{U}$.

2.2. Justifier que $\mathbf{U}$ est un champ de gradient.

2.3. Déterminer le champ scalaire f tel que $\mathbf{U} = \nabla f$.

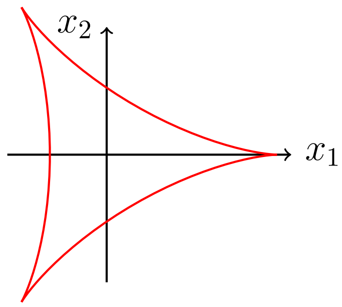

Figure 2 – Courbe $\mathscr{C}$ (en rouge)

Exercice 3 *On considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par :*

$$\begin{cases} t \longmapsto \mathbf{M}(t), \\ t \in [0, 2\pi], \end{cases} \qquad \textit{avec} \qquad \begin{cases} \overline{x}_1(t) = 2\cos t + \cos(2t), \\ \overline{x}_2(t) = 2\sin t - \sin(2t), \end{cases}$$

et représentée sur la figure 2.

3.1. Dresser le tableau de variations du paramétrage.

3.2. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ est fermée.

3.3. Quels sont les points stationnaires de la courbe ?

3.4. Que dire de la tangente à la courbe en $t = \frac{2\pi}{3}$?

3.5. Calculer la longueur de $\mathscr{C}$. *On rappelle que* $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$.