Examen

L'examen est prévu pour une durée de 2 heures. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits. Les 3 exercices sont indépendants. Tout élément de réponse sera pris en compte dans la notation.

1 Une courbe paramétrée

Dans le repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \qquad t \in [0, +\infty[.$$

On introduit également la fonction scalaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1.1. Préciser le gradient et la matrice hessienne de la fonction f.

1.2. Donner le tableau de variations du paramétrage $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$.

1.3. Justifier qu'on peut considérer que la courbe $\mathscr{C}$ est fermée (ce que l'on fera par la suite).

1.4. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est incluse dans une ligne de niveau de la fonction f.

1.5. La courbe $\mathscr{C}$ peut-elle être la courbe représentative d'une fonction d'une seule variable ? Argumenter.

1.6. Prouver que le point A de coordonnées $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

1.7. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

1.8. Donner une ébauche de la courbe $\mathscr{C}$.

1.9. *Soit $\mathcal{D}$ le domaine borné délimité par la courbe $\mathscr{C}$*. Calculer l'aire de $\mathcal{D}$.

On précise que $2^{1/3} \approx 1.3$, $2^{2/3} \approx 1.6$ et $2^{-1/3} \approx 0.8$ pour aider au traçage.

2 Un champ de vecteurs

On considère le champ $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}$.

2.1. Que vaut le rotationnel de $\mathbf{U}$?

2.2. Calculer la circulation de $\mathbf{U}$ le long du cercle de centre O et de rayon 1 ?

2.3. Peut-on déduire de la question 2.1 que $\mathbf{U}$ est un champ de gradient ?

3 Des fonctions particulières

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une fonction scalaire f admettant des dérivées partielles sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et les deux affirmations suivantes :

$$\forall\, (x,y) \in \Omega, \forall\, t > 0,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y); \tag{H}$$

$$\forall\, (x,y) \in \Omega,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y). \tag{H'}$$

3.1. Prouver que (H) $\Longrightarrow$ (H'). *On pourra dériver l'égalité par rapport à t.*

3.2. Prouver que (H') $\Longrightarrow$ (H). *On pourra étudier, à $X = (x,y)$ fixé, la fonction $G_X(t) = \frac{1}{t^\alpha} f(tx, ty)$.*