Examen (2$^{\text{e}}$ session)

L'examen est prévu pour une durée de 2 heures. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Tout élément de réponse sera pris en compte dans la notation.

Barême approximatif et non définitif : 9.25pts (ex. 1) / 2.5pts (ex. 2) / 4.25pts (ex. 3) / 4pts (ex. 4)

Exercice 1

On rappelle la formule de trigonométrie suivante :

$$\forall\, \theta \in [0, 2\pi],\ \cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta.$$

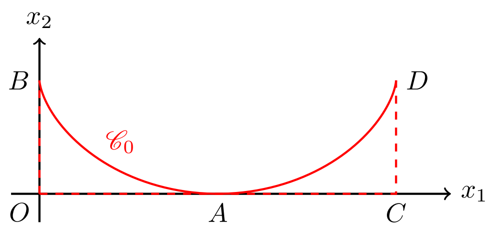

FIGURE 1 – Domaine $\mathcal{D}$ de frontière $\mathscr{C}$

Dans le repère orthonormé d'origine O, on considère la courbe paramétrée $\mathscr{C}_0$ reliant B à D définie par

$$\mathscr{C}_0 = \left\{ \mathbf{M}(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)\ :\ x_1(t) = t - \sin t,\ x_2(t) = 1 + \cos t,\ t \in I = [0, 2\pi] \right\}.$$

Le domaine $\mathcal{D}$, délimité par la courbe $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 \cup OB \cup OC \cup CD$, est représenté sur la figure 1.

1. (a) Étudier la courbe paramétrée $\mathscr{C}_0$ en traçant le tableau de variations du paramétrage (x_1, x_2).
   (b) En déduire les coordonnées des points A, B, C et D. On précisera la valeur du paramètre t correspondant aux positions B, A et D.
   (c) Dans quel sens est parcourue la courbe $\mathscr{C}_0$?
2. Calculer la longueur de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Quelle est la surface du domaine $\mathcal{D}$?
4. On note $\mathscr{C}_A$ la branche de $\mathscr{C}_0$ reliant B à A. Déterminer la circulation I_1 du champ de vecteurs

$$\mathbf{U}_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

   le long de $\mathscr{C}_A$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{D}$ le domaine :

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant 0,\ 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4 \right\}.$$

1. Faire un dessin.
2. Calculer l'intégrale $I_2 = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{D}$ le carré passant par les points $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ et $D(0,-1)$. On note $\mathbf{U}_3$ le champ de vecteurs

$$\mathbf{U}_3(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^2 + x_2^3 \\ 5 - x_1 x_2^2 \end{pmatrix}.$$

1. Représenter $\mathcal{D}$ sur un dessin.
2. Déterminer le rotationnel de $\mathbf{U}_3$.
3. Donner une équation cartésienne des droites (AB), (BC), (CD) et (AD) ainsi qu'une équation paramétrique des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. *On portera une attention particulière à l'orientation du paramétrage.*
4. Calculer l'intégrale double $I_3 = \iint_{\mathcal{D}} \nabla \wedge \mathbf{U}_3(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$.

Exercice 4

On définit la fonction

$$f(x_1,x_2) = \arctan\left(\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}\right) - \arctan x_1 - \arctan x_2.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? On découpera cet ensemble en 3 sous-ensembles sur un dessin.
2. Montrer que f est constante sur chacun de ces 3 sous-ensembles.
3. Calculer $f(0,0)$, $f(\sqrt{3},\sqrt{3})$ et $f(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$ et en déduire la valeur de f en chaque point de son ensemble de définition.

On rappelle que $\arctan'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$.