Commentaires sur les copies de la première session

De manière générale, les copies souffrent d'un grand manque de propreté et il est souvent difficile de distinguer les pages de droite (copie) des pages de gauche (brouillon). De même, les réponses consistent souvent en des suites d'égalités sans aucune explication. Une copie de mathématiques doit comporter des phrases !

Les étudiants n'ont pas tenu compte du barême indiqué et ont presque tous débuté par l'exercice 1 alors que le problème rapportait beaucoup plus de points. De plus, la moitié des points étaient attribués à des questions de cours (2.1, 2.2, 2.3, 2.4(b), 2.4(c), 2.5, 3.2, 3.3, 3.4) mais beaucoup d'étudiants n'ont même pas écrit les formules correspondantes.

1 Exercice préliminaire (7 points)

Cet exercice est un grand classique de L1 traitant des intégrales de Wallis. Il révèle essentiellement une méconnaissance des formules de trigonométrie usuelles par les étudiants. En effet, si la formule de Pythagore $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ est assimilée, les formules de l'angle double $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$ le sont beaucoup moins.

De même, les formules de passage du type $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ sont connues très approximativement. En particulier, on vérifiera sur le cercle trigonométrique que $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$.

2 Problème (17 points)

2.1. La question consistait à étudier le paramétrage $t \mapsto \mathbf{M}(t)$ pour retrouver la courbe $\mathscr{C}_0$. Cette partie a été très peu traitée par les étudiants qui se sont focalisés sur les coordonnées des points A et B. Pour ceux qui ont étudié la courbe paramétrée, il n'était pas nécessaire de s'intéresser à l'intervalle $[0, 2\pi]$ comme dans le cours puisque l'intervalle $[0, \pi/2]$ était donné dans l'énoncé.

2.2. La courbe $\mathscr{C}$ se compose de 3 parties et donc pas seulement de $\mathscr{C}_0$! Il y a aussi les bords $\mathscr{C}_A = OA$ et $\mathscr{C}_B = OB$, dont les longueurs étaient évidentes (et ne nécessitaient pas de calculs savants).

Parmi les erreurs courantes, il y a les affirmations comme quoi $\mathscr{C}_0$ est un arc de cercle (ce qui n'est pas le cas), on encore que la longueur d'une courbe paramétrée est donnée par :

$$|\mathscr{C}_0| = \int_I \|\mathbf{M}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

alors que la formule est

$$|\mathscr{C}_0| = \int_I \|\mathbf{M}'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

De même, si $\mathscr{C}_0$ est une courbe reliant A à B, ce n'est pas pour autant un segment ! Donc la longueur de $\mathscr{C}_0$ n'est pas égale à la longueur AB.

2.3. Une très grosse confusion a été faite par de très nombreux étudiants (erreur commise de nouveau à la question 3.2). Lorsqu'un domaine $\mathcal{D}$ est délimité par une ligne de niveau d'une fonction f, on n'a pas

$$|\mathcal{D}| = \iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

Il n'y a aucun lien ! On a tout simplement :

$$|\mathcal{D}| = \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

La confusion vient du théorème de fonctions implicites qui, à partir de la ligne de niveau $f(x_1, x_2) = c$, garantit l'existence de fonctions telles que $(x_1, x_2) \in \mathcal{D} \iff x_1 \in I,\ \phi(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \psi(x_1)$, puis par Fubini :

$$|\mathcal{D}| = \int_I \left(\int_{\phi(x_1)}^{\psi(x_1)} \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1.$$

Le théorème de Green-Riemann (très peu cité) appliqué à cette intégrale double donne par ailleurs

$$|\mathcal{D}| = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{\mathscr{C}} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{M}$$

pour $\mathbf{V}$ champ de vecteurs défini sur $\mathcal{D}$ tel que $\nabla \wedge \mathbf{V} = 1$. En particulier, on peut prendre $\mathbf{V}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Dans le polycopié de cours, la formule est donnée avec un champ de vecteurs $\mathbf{U}$ mais qui n'a rien à voir avec le champ $\mathbf{U}$ donné dans l'énoncé de l'examen ! ! !

2.4. (a) Il fallait préciser que c'était la ligne de niveau égale à 1 de f.

(b) Le gradient d'une fonction f est un vecteur ! 1 étudiant sur 2 a donné la somme des deux dérivées partielles au lieu du vecteur. Par ailleurs, aucun étudiant ne s'est soucié de savoir sur quel domaine la fonction admettait des dérivées partielles, qui, en l'occurence, n'étaient pas définies en $(0, 0)$.

(c) Il y a une confusion entre le gradient de la fonction qui est toujours orthogonal aux lignes de niveau de la fonction et le vecteur $\mathbf{M}'(t)$ qui est tangent à la courbe paramétrée $t \mapsto \mathbf{M}(t)$.

(d) Les étudiants semblent plus à l'aise avec les équations paramétriques de tangentes (ce qui ne pose aucun souci) mais il faut savoir passer de cette formulation aux équations cartésiennes (et réciproquement).

(e) $\mathbf{N}_1$ est sur l'axe des abscisses et $\mathbf{N}_2$ sur l'axe des ordonnées, ce qui ne semble pas être évident pour tout le monde ...

2.5. (a) Il ne fallait pas oublier de citer le nom du théorème (**Poincaré** et non Poincarré ou Point-Carré !) et d'en vérifier les hypothèses (domaine sans trou).

(b) La question traitait du flux et non de la circulation du champ $\mathbf{U}$ ...

3 Exercice annexe (5 points)

3.1. La question a été mal comprise par les étudiants qui n'ont pas fait le lien entre la figure et les coordonnées proposées.

3.2. Certains ont confondu la jacobienne avec la hessienne. D'autres ont écrit la transposée de la jacobienne (dans une colonne, on dérive par rapport à la même variable).

3.3. De nombreux étudiants ont confondu $\Omega(t)$ qui n'était qu'une portion de l'intérieur de $\mathcal{E}$.