$\mathscr{O}$utils $\mathscr{M}$athématiques de $\mathscr{B}$ase

1 Inégalités de Gronwall

Exercice 1 *Soient f, g, et h trois fonctions continues, f dérivable et g positive, vérifiant l'inégalité :*

$$f'(t) \leqslant f(t)g(t) + h(t).$$

1. *On considère dans cette question uniquement que g est constante (de valeur $c \in \mathbb{R}$). En introduisant la fonction $F : t \mapsto f(t)e^{-ct}$, montrer que :*

$$f(t) \leqslant e^{ct} \left(f(0) + \int_0^t e^{-c\tau} h(\tau)\, d\tau \right).$$

2. *Prouver dans le cas général que l'on a :*

$$f(t) \leqslant e^{G(t)} \left(f(0) + \int_0^t e^{-G(\tau)} h(\tau)\, d\tau \right),$$

où G est la primitive de g qui s'annule en 0.

Exercice 2 *Soient f, g, et h trois fonctions continues, g positive, vérifiant l'inégalité :*

$$f(t) \leqslant \int_0^t f(s)g(s)\, ds + h(t).$$

Prouver qu'alors ces trois fonctions vérifient :

$$f(t) \leqslant e^{G(t)} \int_0^t e^{-G(\tau)} g(\tau)h(\tau)\, d\tau + h(t),$$

où $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(\tau)\, d\tau$.

Exercice 3 *On considère :*

- $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$, *continue, croissante, telle que $f(x) > 0$ pour $x > 0$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} < \infty$;*
- $y : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$, *continue ;*
- *g positive et intégrable sur tout compact de $[0, +\infty[$;*
- $y_0 > 0$.

On suppose que :

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad y(x) \;\leqslant\; y_0 + \int_0^x g(t)\, dt + \int_0^x f\big(y(t)\big)\, dt.$$

On souhaite démontrer le résultat suivant : si F est la primitive de $\dfrac{-1}{f}$ qui tend vers 0 en $+\infty$, alors il existe un unique T^* vérifiant

$$T^* = F\left(y_0 + \int_0^{T^*} g(t)\, dt \right), \tag{1}$$

et tel que :

$$\forall\, T < T^*,\ \forall\, x \leqslant T, \qquad y(x) \;\leqslant\; F^{-1}\left[F\left(y_0 + \int_0^T g(t)\, dt \right) - T \right]. \tag{2}$$

1. *Caractériser F (on justifiera en particulier son existence). En déduire l'existence de la réciproque de F de $]0, F(y_0)[$ dans un intervalle à préciser.*
2. *Justifier l'existence et l'unicité de T^* solution de (1).*
3. *On définit pour $T < T^*$ la fonction $z_T : t \longmapsto y_0 + \int_0^T g(s)\,ds + \int_0^t f\big(y(s)\big)\,ds$.*
   (a) *Pourquoi a-t-on $y(x) \leqslant z_T(T)$ pour tout $x \leqslant T$?*
   (b) *Quelle est la régularité de z_T ?*
   (c) *Etudier la monotonie et le signe de z_T.*
   (d) *Majorer z_T' à l'aide de z_T et en déduire l'inégalité :*
   $$F\big(z_T(T)\big) - F\big(z_T(0)\big) \geqslant -T.$$
4. *Conclure.*

2 Fonctions en tout genre

Exercice 4 *Soit $\alpha \in]0,1[$. On considère la suite de fonctions (U_n) définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :*

$$U_0(x) = \cos x, \qquad U_1(x) = \sin x, \qquad \text{puis, pour tout } n \geqslant 1,\ U_{n+1}(x) = U_n^{1-\alpha}(x) U_{n-1}^{\alpha}(x).$$

1. *Déterminer une expression de $U_n(x)$ en fonction de n et de x.*
2. *Prouver que la suite converge uniformément sur $\left[x_0, \frac{\pi}{2} - x_0\right]$ pour tout $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. On note U_∞ la limite.*
3. *Montrer que la convergence est uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*

Exercice 5 *Prouver les identités :*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)\ln t}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Exercice 6 *Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $xy''+y'+xy = 0$.*

Exercice 7 *On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.*

1. *On considère deux suites (a_n) et (b_n) complexes. On pose $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Prouver la formule :*
$$\sum_{i=1}^N a_i b_i = -\sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1}) B_{i-1} + a_N B_N - a_0 b_0.$$
2. *Quel est le domaine de définition complexe de la fonction f ?*
3. *On pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$. En étudiant cette suite, déterminer la valeur de $f(-1)$.*

Exercice 8 *Soit $a \in]0,1[$.*

1. *On considère la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par : $f(t) = \cos(at)$. Quelle est la nature de la convergence de la série de Fourier de f ?*

2. *En déduire la valeur de* $\cot(a\pi)$ *sous forme de somme de série.*
3. *Montrer que la suite de terme général* $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}\right)$, *t réel, converge.*
4. *Soit* $t \in]0, 2\pi[$. *Montrer que :*
$$\sin t = t \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Exercice 9 *Etudier les extrema de la fonction :*

$$f : (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

3 Algèbre linéaire

Exercice 10 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On considère l'application linéaire u sur* $\mathbb{R}^3$ *de matrice dans la base canonique :*

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs propres de* A_α *ainsi que les multiplicités associées.*
2. *Pour quelles valeurs de* α *la matrice est-elle diagonalisable ? Pour ces valeurs, déterminer une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de u est diagonale.*
3. *Déterminer une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de u est triangulaire.*

Exercice 11 *On considère deux endomorphismes u et v sur E, espace vectoriel de dimension finie* $n \neq 0$, *tels que :* $u \circ v - v \circ u = u$.

1. *Montrer que u est nilpotent. On pourra utiliser l'application linéaire* $F_v : m \in \mathcal{L}(E) \mapsto m \circ v - v \circ m$.
2. *Justifier que u et v admettent au moins un vecteur propre commun.*
3. *On suppose que v est diagonalisable et que* $\dim \ker u = 1$. *Déterminer v.*

Exercice 12 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On pose :* $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.*

Exercice 13 *On considère l'application de* $\mathbb{R}_n[X]$ *dans lui-même définie par :*

$$f(P) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X).$$

1. *Étudier l'image et le noyau de f.*
2. *Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$.
3. *On pose* $g(P) = P(X + \frac{1}{2}) - P(X - \frac{1}{2})$ *de matrice B dans la base canonique. Comparer* B^2 *et A.*

$\mathscr{A}$utour du $\mathscr{N}$ombre d'$\mathscr{O}$r

On note dans la suite :

- F_n et u_n, les suites définies par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad ;$$

- φ le nombre d'or donné par : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et son conjugué $\bar{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$;
- f et G les fonctions définies par $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ et $G : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - x - 1}$;
- $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{x^n}$ la série de somme partielle $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{x^k}$.

1 Quelques propriétés du nombre d'or

1. Déterminer les racines du polynôme $X^2 - X - 1$.
2. Justifier les formules :
   (a) $\varphi^2 = \varphi + 1$;
   (b) $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$;
   (c) $\dfrac{\varphi^2 + 1}{2\varphi - 1} = \varphi$;
   (d) $\dfrac{\varphi - 1}{2 - \varphi} = \varphi$.

On admet que $\bar{\varphi}$ vérifie les mêmes équations.

2 Analyse séquentielle

1. Étudier la suite (F_n). *On donnera en particulier son expression en fonction de n, son sens de variations et sa limite.*
2. Prouver que $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. Faire une étude rapide de la fonction f, comprenant sens de variations et points fixes éventuels.
4. Montrer que l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ est stable par f. En déduire que la suite (u_n) est bornée.
5. La suite (u_n) est-elle monotone ? convergente ? Déterminer sa limite éventuelle.

3 Étude d'une série

1. Déterminer l'ensemble de définition de la série S.
2. Montrer que $x^2 S_{n+1} - x S_n - S_{n-1} = x$. En déduire que $S = G$ sur son ensemble de définition.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n}$.
4. Déterminer une primitive de la fonction G.

4 Équation différentielle

On considère l'équation :

$$\begin{cases} x^2y'(x) = (x^2+1)y^2(x), \\ y(1) = c \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

1. Justifier l'existence d'une solution maximale de l'EDO.
2. Montrer que $-G$ est solution de l'équation différentielle ordinaire (3) pour un c à préciser.
3. Donner une solution triviale de l'EDO dans le cas $c = 0$. **On suppose dans la suite** $c \neq 0$.
4. Après division par y^2 (à justifier), intégrer l'équation puis donner la forme générale de la solution.
5. On note $h(c)$ le pôle positif de la solution générale. Étudier la fonction h et en déduire l'intervalle d'existence.

$\boxed{\mathscr{A}\text{utour d'un } \mathscr{M}\text{odèle } \mathscr{D}\text{ifférentiel}}$

On considère le système différentiel suivant, appelé `modèle abstrait de vibration de bulles`, dans un domaine Ω borné et régulier dans $\mathbb{R}^d$, $d \in \{1,2,3\}$ et d'inconnues Y (fonction couleur) et ϕ (potentiel de vitesse) :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla\phi \cdot \nabla Y = 0, & \text{(4a)} \\ Y(0,\boldsymbol{x}) = Y^0(\boldsymbol{x}), & \text{(4b)} \\ \Delta\phi(t,\boldsymbol{x}) = Y(t,\boldsymbol{x}) - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega Y(t,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}', & \text{(4c)} \\ \nabla\phi \cdot \boldsymbol{n}_{|\partial\Omega} = 0. & \text{(4d)} \end{cases}$$

Lorsque Y^0 est la fonction indicatrice d'un sous-domaine Ω_1^0 de Ω, ce système modélise une évolution simplifié de deux fluides non-miscibles. Il présente un couplage entre une équation hyperbolique et une équation elliptique.

On admet que si la donnée initiale est suffisamment régulière, il existe une unique solution Y continue par rapport aux variables de temps et d'espace.

L'espace $\mathscr{D}([0,T])$ est tel que si, pour toute fonction $\theta \in \mathscr{D}([0,T])$, la fonction $h \in L^\infty([0,T])$ vérifie : $\displaystyle\int_0^T h(\tau)\theta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$, alors $h \equiv 0$. De plus, toute fonction de $\mathscr{D}([0,T])$ est nulle en 0 et en T.

1. (a) Ecrire le système en une dimension d'espace, avec $\Omega = [-1,1]$.
   (b) Donner l'expression du champ de vitesse $\partial_x\phi$ en fonction de Y.
2. Y-a-t-il unicité du potentiel de vitesse ϕ ?
3. Que dire si l'on change Y^0 en $-Y^0$?
4. On note $\|Y\|_0(t) = \left[\displaystyle\int_\Omega Y^2(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right]^{1/2}$.
   (a) Montrer que $\left(\|Y\|_0^2\right)'(t) = \displaystyle\int_\Omega \Delta\phi(t,\boldsymbol{x})\,Y^2(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.
   (b) En déduire que :
   $$\|Y\|_0(t) \leqslant \|Y^0\|_0 \exp\left[t \sup_{[0,t]\times\Omega} |Y|\right].$$

(c) Que dire dans le cas où $Y^0 = 0$?

5. Soit (φ_n) une suite de fonctions sur Ω qui converge faiblement vers la fonction $\mathbf{1}_\Omega$. Soit $\theta \in \mathscr{D}([0,T])$. On suppose ici qu'il existe une solution au système (4) sur l'intervalle $[0,T]$ de la forme $\mathbf{1}_{\Omega_1(t)}(\boldsymbol{x})$, avec $Y^0(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}_{\Omega_1^0}(\boldsymbol{x})$ et $\Omega_1(0) = \Omega_1^0$. On pose alors $f(t) = \dfrac{|\Omega_1(t)|}{|\Omega|}$. On admet que f est dérivable sur $[0,T]$.
   (a) Multiplier l'équation (4a) par $\varphi_n\theta$ puis intégrer en espace-temps.
   (b) Quelle égalité obtient-on après passage à la limite ?
   (c) Déduire de ce qui précède que la fonction f est solution de l'EDO : $f'(t) = f(t)\big(1 - f(t)\big)$.
   (d) Analyser cette EDO et déterminer sa solution, ainsi que son temps d'existence.

6. On souhaite étudier les solutions radiales dans le cas où Ω est un cylindre en 2 dimensions. On rappelle qu'en coordonnées polaires, en notant $f(r,\theta) = \tilde{f}(x,y)$:

$$\begin{pmatrix} \partial_x \tilde{f} \\ \partial_y \tilde{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_r f \\ r^{-1}\partial_\theta f \end{pmatrix}, \qquad \Delta \tilde{f} = \partial_r^2 f + \frac{1}{r}\partial_r f + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f.$$

   (a) Récrire le système en coordonnées polaires.
   (b) Rechercher les solutions radiales du type : $Y(t,r,\theta) = \mathbf{1}_{\{0\leqslant r\leqslant \rho(t)\}}(r)$ avec une condition initiale du type $Y^0(r,\theta) = \mathbf{1}_{\{0\leqslant r\leqslant \rho_0\}}(r)$, $\rho_0 > 0$ donné.

   On admet que $\partial_t Y = \rho'(t)\delta_{r=\rho(t)}$ et $\partial_r Y = \delta_{r=\rho(t)}$.