

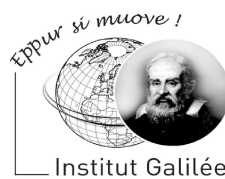
\*

CALCUL SCIENTIFIQUE AVANCE

PRINCIPE VARIATIONNEL  
POUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

\*

**Yohan PENEL**



LAURENCE HALPERN & JULIET RYAN

26 Octobre 2007

ONERA

---

cea

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Théorèmes et inégalités de base</b>	<b>3</b>
1.1	Trace, densité et compacité . . . . .	3
1.2	Inégalités . . . . .	3
1.3	Lax-Milgram . . . . .	4
1.3.1	Préliminaires . . . . .	5
1.3.2	Énoncé . . . . .	5
1.4	Formules de Green . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Énoncé du problème et principe variationnel</b>	<b>7</b>
2.1	Problème modèle et conditions aux limites . . . . .	7
2.2	Formulation variationnelle . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Discrétisation</b>	<b>11</b>
3.1	Sous-espaces de dimension finie et bases . . . . .	11
3.2	Problème variationnel discret . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Notion de conditions de transmission</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Applications</b>	<b>14</b>
5.1	Problème de Laplace-Neumann . . . . .	14
5.1.1	Équation de compatibilité . . . . .	14
5.1.2	Absence d'origine . . . . .	15
5.1.3	Résolution sur $\mathcal{V}$ . . . . .	15
5.1.4	Existence et unicité de la solution de (43) . . . . .	16
5.1.5	Implémentation . . . . .	16
5.1.6	Problème de substitution par intégration de la contrainte . . . . .	18
5.1.7	Problème de substitution par pénalisation . . . . .	19
5.2	Flot optique . . . . .	20
5.2.1	Position du problème . . . . .	20
5.2.2	Méthode FETI-2LM . . . . .	21

## Références

- [1] ALLAIRE G., *Analyse Numérique et Optimisation*, Editions Polytechnique (2005).
- [2] ERN A. & GUERMOND J.-L., *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*, Mathématiques et Applications, Springer (2002).

# Introduction

L'objectif de ces notes de cours est d'une part de présenter de manière non exhaustive des outils fondamentaux pour l'étude des formulations variationnelles et d'autre part de mettre en place une méthode d'éléments finis avec la perspective d'en améliorer la résolution par des méthodes de décomposition de domaines.

Ces notes s'articulent donc autour d'une thématique centrale, à savoir la résolution d'une EDP linéaire classique d'ordre 2, munie de conditions aux limites d'ordre 1. Dans la première partie, on présente quelques outils nécessaires pour démontrer le caractère bien posé du problème, et notamment le théorème de Lax-Milgram dont on donne une démonstration. La seconde partie traite ensuite de l'établissement de la formulation variationnelle associée à l'EDP citée précédemment, puis de l'existence et de l'unicité de sa solution. On s'intéresse en particulier à l'influence des conditions aux limites, qui se révèlent fondamentales dans les méthodes de décomposition de domaines. La troisième partie comporte une brève présentation de la méthode des éléments finis classiques  $\mathbb{P}_1$  ainsi que le traitement au niveau discret de chacune des conditions aux limites. La dernière partie est consacrée quant à elle à deux cas particuliers de l'EDP de la partie 2, à savoir l'étude tout d'abord d'un cas mal posé de cette EDP, et ensuite d'un cas concret issu d'une problématique industrielle.

Ces rappels s'insèrent dans le cours de Calcul Scientifique Avancé de troisième année de la formation d'ingénieur Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (MACS) de l'Institut Scientifique et Polytechnique Galilée (ISPG). On y présente diverses techniques d'analyse numérique telles que la méthode multigrille et plusieurs méthodes de calcul parallèle par décomposition de domaines.

## 1 Théorèmes et inégalités de base

Soit  $\Omega$  un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\Gamma$  une partie de  $\partial\Omega$  de mesure non nulle. On présente sous le concept d'un formulaire un certain nombre de résultats d'analyse fonctionnelle fondamentaux pour l'étude des formulations variationnelles, et principalement les inégalités de Poincaré et le théorème de Lax-Milgram, dont la démonstration est donnée dans le paragraphe 1.3.

### 1.1 Trace, densité et compacité

**Théorème 1** *L'application trace  $\gamma$  définie par :*

$$\gamma : \begin{cases} \mathcal{H}^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma), \\ u \longmapsto u|_{\Gamma}, \end{cases}$$

*est linéaire et continue. De plus,  $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) = \gamma(\mathcal{H}^1(\Omega))$  est dense dans  $L^2(\Gamma)$ . On note  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$  l'espace  $\ker(\gamma)$  lorsque  $\Gamma = \partial\Omega$ .*

**Théorème 2** *L'espace  $\mathcal{C}_0^\infty(\bar{\Omega})$  des fonctions infiniment dérivables à support compact est dense dans  $L^2(\Omega)$ .*

**Théorème 3 (Relèvement)** *Il existe une constante  $CR(\Omega) > 0$  telle que :*

$$\forall g \in \mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega), \exists u_g \in \mathcal{H}^1(\Omega), \gamma(u_g) = g \text{ et } \|u_g\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq CR(\Omega) \|g\|_{\mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

**Théorème 4 (Rellich)** *L'application identité de  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte, i.e. de toute suite bornée dans  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ , on peut extraire une sous-suite convergente dans  $L^2(\Omega)$ .*

### 1.2 Inégalités

**Propriété 1 (Poincaré)** *Il existe une constante  $C_P(\Omega) > 0$  telle que, pour tout  $u \in \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid \gamma(v) = 0\}$ , on ait :*

$$\|\nabla u\|_{0,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy \geq C_P(\Omega) \|u\|_{0,\Omega}^2,$$

*soit :*

$$\|\nabla u\|_{0,\Omega}^2 \geq \frac{C_P(\Omega)}{1 + C_P(\Omega)} \|u\|_{1,\Omega}^2.$$

Cette dernière inégalité garantit que la semi-norme  $\|\nabla \cdot\|_{0,\Omega}$  est une norme sur  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$  équivalente à la norme classique.

On définit sur  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  la forme linéaire suivante :

$$m : \begin{cases} \mathcal{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \\ v \longmapsto m(v) = \frac{\int_{\Omega} v(x) dx}{\int_{\Omega} dx}. \end{cases}$$

La linéarité de  $m$  est évidente.  $m$  est de plus continue :

$$|m(v)| \leq \frac{\|\mathbf{1}_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)}}{\mu(\Omega)} \leq \frac{\|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}}{\sqrt{\mu(\Omega)}},$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ . On note alors :

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} v(x) dx = 0 \right\}.$$

$\mathcal{V}$  est un espace de Hilbert pour la norme  $\mathcal{H}^1$  et est un hyperplan en tant que noyau de  $m$ .

**Propriété 2 (Poincaré-Wirtinger)** *Il existe une constante  $C_{PW}(\Omega) > 0$  telle que :*

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega), \|v - m(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{PW}(\Omega) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

PREUVE. Raisonnons par l'absurde. Si l'inégalité est fautive :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists v_n \in \mathcal{H}^1(\Omega), \|v_n - m(v_n)\|_{L^2(\Omega)} \geq n \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Posons  $w_n = v_n - m(v_n) \in \mathcal{V}$  puis :  $u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_{L^2(\Omega)}} \in \mathcal{V}$ . On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \geq n \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le théorème 4 de **Rellich** assure que la suite bornée  $(u_n)$  de  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  admet une sous-suite  $(u_{\phi(n)})$  convergente dans  $L^2(\Omega)$ . Or :

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc  $(u_{\phi(n)})$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ , espace de Hilbert, donc convergente vers  $v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$  et même  $v \in \mathcal{V}$ . Par passage à la limite et continuité de la norme, on a :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

De la seconde égalité, on déduit que  $v$  est constante sur  $\Omega$  connexe. Comme  $v \in \mathcal{V}$ ,  $\int_{\Omega} v(x) dx = 0$  et donc  $v \equiv 0$  sur  $\Omega$ , ce qui est contradictoire avec  $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . ■

### 1.3 Lax-Milgram

Le but de cette sous-partie est d'énoncer et de démontrer le théorème de Lax-Milgram. On utilise pour cela le théorème 5 de Riesz, dont la démonstration est laissée au lecteur mais pour laquelle on donne les quatre lemmes fondateurs.

### 1.3.1 Préliminaires

**Lemme 1** Pour toute partie  $A$  de  $H$ ,  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ .

**Lemme 2** Soit  $C$  un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ . Alors :

$$\forall x \in H, \exists! c_x \in C, \|x - c_x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\|.$$

De plus,  $x - c_x \in C^\perp$ .

**Lemme 3** Si  $C$  est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert  $H$ , alors :

$$H = C \oplus C^\perp.$$

**Lemme 4** Soit  $\ell \in H'$  une forme linéaire non nulle sur  $H$ . Alors  $\ker \ell$  est un hyperplan fermé de  $H$ .

**Théorème 5 (Riesz)** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert. Alors :

$$\forall \ell \in H', \exists! a_\ell \in H, \forall x \in H, \ell(x) = \langle a_\ell, x \rangle.$$

De plus, l'application  $\begin{cases} H' \longrightarrow H \\ \ell \longmapsto a_\ell \end{cases}$  est une isométrie.

### 1.3.2 Énoncé

**Définition 1** Une forme bilinéaire  $\varphi$  sur un espace  $V$  de Hilbert est dite  $V$ -**elliptique** (ou **coercive**) si :

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in H, \varphi(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2.$$

**Théorème 6 (Lax-Milgram)** Soit  $V$  un espace de Hilbert. Soient  $L$  une forme linéaire continue sur  $V$  et  $a$  une forme bilinéaire continue sur  $V \times V$ . On suppose  $a$   $V$ -elliptique. Alors, le problème :

Trouver  $u \in V$  tel que :

$$\forall v \in V, a(u, v) = L(v) \tag{1}$$

admet une unique solution. De plus, l'application  $\Phi : \begin{cases} V' \longrightarrow V \\ L \longmapsto u \end{cases}$  est linéaire continue.

**PREUVE 1.** On note  $M$  et  $\alpha$  les constantes respectives de continuité et de coercivité de  $a$ . Par défaut, les normes sont celle de  $V$ .

Comme  $L \in V'$ , d'après le **théorème 5**, il existe  $\tau_L \in V$  tel que :

$$\forall v \in V, L(v) = \langle \tau_L, v \rangle.$$

Pour  $u \in V$ , on pose  $\varphi_u : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto a(u, v) \end{cases}$ . Cette application est linéaire continue, i.e.  $\varphi_u \in V'$ . Il existe donc  $A_u \in V$  tel que :

$$\forall v \in V, \varphi_u(v) = \langle A_u, v \rangle.$$

On définit alors l'application  $A : \begin{cases} V \longrightarrow V \\ u \longmapsto A_u \end{cases}$ .  $A$  est linéaire continue. En effet, d'après le **théorème 5** :

$$\|A(u)\|_V = \|\varphi_u\|_{V'} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|a(u, v)\|}{\|v\|} \leq M \cdot \|u\|.$$

Le problème variationnel (1) est équivalent à :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } A(u) = \tau_L. \tag{2}$$

Montrons donc que  $A$  est inversible.

- On a :

$$\begin{aligned} \forall v \in V \setminus \{0\}, \alpha \|v\|^2 &\leq a(v, v) = \langle A(v), v \rangle && \text{par coercivité,} \\ &\leq \|A(v)\| \cdot \|v\| && \text{par Cauchy-Schwarz,} \end{aligned}$$

soit :

$$\alpha \|v\| \leq \|A(v)\|. \quad (3)$$

- On en déduit l'injectivité de  $A$ . En effet, si  $A(v) = 0$ , d'après (3), on a  $\|v\| = 0$  ( $\alpha > 0$ ) soit  $v = 0$  par séparation de la norme.
- En dimension finie, on déduit la bijectivité de l'injectivité. En dimension infinie, on montre que  $Im A = V$ .
  - Soit  $w \in \overline{Im A}$ . Il existe alors une suite  $(w_n)$  de  $Im A$  qui converge vers  $w$  et donc une suite  $(v_n)$  de  $A$  telle que  $(A(v_n))$  converge vers  $w$ . On a alors d'après (3) :

$$\|A(v_n) - A(v_m)\| = \|A(v_n - v_m)\| \geq \alpha \|v_n - v_m\|.$$

Comme la suite  $(A(v_n))$  est convergente, elle est de Cauchy. D'où, la suite  $(v_n)$  est elle-même de Cauchy, donc convergente car  $V$  est complet. Notons  $v \in V$  sa limite. Par continuité de  $A$ ,  $(A(v_n))$  converge vers  $A(v)$ , soit, par unicité de la limite,  $A(v) = w$  et  $w \in Im A$ , ce qui montre que  $Im A$  est fermé.

- Comme  $Im A$  est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace  $V$  de Hilbert, d'après le **lemme 3** :

$$V = Im A \oplus (Im A)^\perp.$$

- Soit  $v \in (Im A)^\perp$ . Alors, par coercivité :

$$\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle \overbrace{A(v)}^{\in Im A}, \overbrace{v}^{\in (Im A)^\perp} \rangle = 0,$$

soit  $v = 0$  et  $V = Im A$ .

- En conclusion,  $A$  est surjectif donc bijectif.
- $A$  étant linéaire et bijective, alors  $A^{-1}$  existe et est linéaire. De plus, pour tout  $w \in V$ , il existe  $v \in V$  tel que  $w = A(v)$ . Or, d'après (3) :

$$\alpha \|v\| \leq \|A(v)\| \quad \text{soit} \quad \alpha \|A^{-1}(w)\| \leq \|w\|,$$

et  $A^{-1}$  est continue.

- Enfin,  $\Phi$  est linéaire d'après (2) et continue par continuité de  $A^{-1}$  :

$$\forall L \in V', \exists! u \in V, u = A^{-1}(\tau_L) \quad \text{et} \quad \|u\|_V = \|A^{-1}(\tau_L)\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|\tau_L\|_V = \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V'}.$$

■

Dans le cas où  $a$  est symétrique, on peut proposer une autre démonstration.

PREUVE 2. Si  $a$  est bilinéaire, symétrique et définie positive (par coercivité), alors  $a$  définit un produit scalaire sur  $V$ , noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ , et induit une norme  $\|\cdot\|_a$ .

Montrons alors que l'espace préhilbertien  $(V, \|\cdot\|_a)$  est complet (donc de Hilbert). Pour tout  $u \in V$ , on a :

$$\begin{aligned} \|u\|_a^2 := a(u, u) &\leq M \|u\|_V^2 && \text{par continuité,} \\ &\geq \alpha \|u\|_V^2 && \text{par coercivité.} \end{aligned}$$

Les normes  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_a$  sont donc équivalentes.

Soit  $(v_n)$  une suite de Cauchy dans  $(V, \|\cdot\|_a)$ . Par équivalence,  $(v_n)$  est une suite de Cauchy dans  $(V, \|\cdot\|_V)$  complet donc convergente. Toujours par équivalence,  $(v_n)$  converge dans  $(V, \|\cdot\|_a)$ . D'où,  $(V, \|\cdot\|_a)$  est complet.

De même,  $L$  est continue dans  $(V, \|\cdot\|_V)$  donc dans  $(V, \|\cdot\|_a)$ . On applique ensuite le **théorème 5** sur  $(V, \|\cdot\|_a)$  :

$$\exists! u \in V, L(v) = \langle u, v \rangle_a = a(u, v).$$

■

## 1.4 Formules de Green

**Théorème 7 (Green)** Pour  $\mathbf{f} \in \mathcal{H}(\text{div})$  et  $v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{f}(x)) v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma) v(\sigma) d\sigma - \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

En particulier, pour  $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$  et  $v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma) v(\sigma) d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx,$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à  $\partial\Omega$  et  $\sigma$  la mesure linéique sur  $\partial\Omega$ .

## 2 Énoncé du problème et principe variationnel

On s'intéresse principalement dans cette partie à la formulation variationnelle associée à l'EDP (4) munie de plusieurs conditions aux limites.

On notera par la suite :

- $\Omega$  un ouvert régulier borné de  $\mathbb{R}^2$  ;
- $\Gamma_D, \Gamma_N$  et  $\Gamma_R$  trois ensembles de mesures non nulles formant une partition de  $\partial\Omega$  ;
- $\gamma_D, \gamma_N$  et  $\gamma_R$  les applications traces sur  $\Gamma_D, \Gamma_N$  et  $\Gamma_R$  ;
- $C_\gamma$  une constante de continuité commune aux trois applications ;
- $\mathcal{H}_{g_d, \Gamma_D}^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid \gamma_D(u) = g_d\}$ . En particulier,  $\mathcal{H}_{0, \Gamma_D}^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid \gamma_D(u) = 0\}$ .

### 2.1 Problème modèle et conditions aux limites

On considère dans la suite le problème modèle suivant dans  $\Omega$  :

$$cu + \Phi \cdot \nabla u - \text{div}(\mathbf{K} \nabla u) = f, \quad (4)$$

où l'inconnue est  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c$  et  $f$  sont des fonctions numériques données,  $\Phi$  une fonction vectorielle donnée et  $\mathbf{K}$  une application connue de  $\Omega$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . L'équation (4) s'écrit encore :

$$cu + \sum_{i=1}^2 \Phi_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f.$$

Cette équation nécessite des conditions aux limites sur le bord  $\partial\Omega$  de sorte que le problème soit bien posé. On s'intéresse principalement aux trois types de conditions du premier ordre suivantes :

- une condition de type Dirichlet qui impose la valeur de la fonction sur le bord  $\Gamma_D$  :

$$u = g_d, \quad [\Gamma_D]; \quad (5)$$

- une condition de type Neumann qui contrôle le flux sur le bord  $\Gamma_N$  :

$$\mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n} = g_n, \quad [\Gamma_N]; \quad (6)$$

- une condition de type Robin (ou Fourier) qui est une combinaison linéaire des deux précédentes :

$$\mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n} + \alpha_r u = g_r, \quad [\Gamma_R]. \quad (7)$$

Les fonctions  $g_d, g_n$  et  $g_r$  sont des données, de même que le réel  $\alpha_r$ . On distingue les conditions de type Dirichlet (qui sont dites *essentiell*es<sup>2</sup>) tandis que les deux autres sont dites *naturell*es<sup>3</sup>.

1. En toute généralité,  $\alpha_r$  peut être une fonction de  $L^2(\Gamma_R)$ , mais dans un souci de clarté et de simplification, on suppose que  $\alpha_r$  est ici un réel.

2. La condition de Dirichlet intervient dans l'espace fonctionnel.

3. Les conditions de type Robin ou Neumann n'interviennent que dans la formulation variationnelle.

Le tenseur  $\mathbf{K}$  reflète l'anisotropie du problème comme par exemple dans la loi de Fourier. On peut cependant prendre le cas particulier de l'isotropie, qui correspond au cas où  $\mathbf{K}$  est une matrice scalaire, i.e. multiple de l'identité. Ainsi, pour  $\mathbf{K} = \lambda \mathcal{I}$ , le problème global se réécrit :

$$\begin{cases} cu + \Phi \cdot \nabla u - \lambda \Delta u = f, & [\Omega] \\ u = g_d, & [\Gamma_D] \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g_n, & [\Gamma_N] \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} + \alpha_r u = g_r, & [\Gamma_R] \end{cases} \quad (8)$$

Il faut noter l'importance des conditions aux limites qui permettent de fermer les systèmes. Dans les méthodes de décomposition de domaine, on crée de nouvelles frontières sur lesquelles on a le choix des conditions aux limites, d'où la nécessité d'en comprendre les effets et le sens physique.

## 2.2 Formulation variationnelle

On appelle *solution classique* du problème (4-5-6-7) une fonction suffisamment régulière vérifiant ces quatre égalités presque partout. On considère néanmoins un autre type de solutions, moins régulières, appelées *solutions faibles*. En multipliant l'équation (4) par une fonction test  $v$  dont la régularité est à préciser puis en intégrant sur le domaine  $\Omega$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c(x, y)u(x, y)v(x, y) \, dx dy + \int_{\Omega} v(x, y)\Phi(x, y) \cdot \nabla u(x, y) \, dx dy - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{K}\nabla u)(x, y)v(x, y) \, dx dy \\ = \int_{\Omega} f(x, y)v(x, y) \, dx dy. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green (théorème 7), on obtient, après utilisation des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c(x, y)u(x, y)v(x, y) \, dx dy + \int_{\Omega} v(x, y)\Phi(x, y) \cdot \nabla u(x, y) \, dx dy + \int_{\Omega} \langle \mathbf{K}\nabla u, \nabla v \rangle(x, y) \, dx dy \\ - \int_{\Gamma_D} \langle \mathbf{K}\nabla u, \mathbf{n} \rangle(\sigma)v(\sigma) \, d\sigma + \alpha_r \int_{\Gamma_R} u(\sigma)v(\sigma) \, d\sigma \\ = \int_{\Gamma_N} g_n(\sigma)v(\sigma) \, d\sigma + \int_{\Gamma_R} g_r(\sigma)v(\sigma) \, d\sigma + \int_{\Omega} f(x, y)v(x, y) \, dx dy. \end{aligned}$$

Pour que chacune des quantités intervenant dans l'égalité précédente soit bien définies, on est amené à émettre les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega) \text{ et } \nabla u \in (L^2(\Omega))^2, & (9a) \\ v \in L^2(\Omega) \text{ et } \nabla v \in (L^2(\Omega))^2, & (9b) \\ c \in \mathcal{L}^\infty(\Omega), & (9c) \\ \Phi \in (\mathcal{L}^\infty(\Omega))^2, & (9d) \\ \mathbf{K} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})), & (9e) \\ (g_n, g_r) \in L^2(\Gamma_N) \times L^2(\Gamma_R), & (9f) \\ f \in L^2(\Omega). & (9g) \end{cases}$$

De plus, pour annuler l'intégrale de bord sur  $\Gamma_D$  et pour justifier l'existence des intégrales en  $v$ , on choisit  $v \in \mathcal{H}_{0, \Gamma_D}^1(\Omega)$ . On est donc ramené à résoudre le problème de :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in \mathcal{H}_{g_d, \Gamma_D}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \forall v \in \mathcal{H}_{0, \Gamma_D}^1(\Omega), a(u, v) = \ell(v). \end{aligned} \quad (10)$$



où :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} c(x, y)u(x, y)v(x, y) dx dy + \int_{\Omega} v(x, y)\Phi(x, y) \cdot \nabla u(x, y) dx dy + \int_{\Omega} \langle \mathbf{K} \nabla u, \nabla v \rangle(x, y) dx dy + \alpha_r \int_{\Gamma_R} u(\sigma)v(\sigma) d\sigma, \quad (11)$$

$$\ell(v) = \int_{\Gamma_N} g_n(\sigma)v(\sigma) d\sigma + \int_{\Gamma_R} g_r(\sigma)v(\sigma) d\sigma + \int_{\Omega} f(x, y)v(x, y) dx dy. \quad (12)$$

Le problème (10) est appelé formulation variationnelle associée au système (4-7). La solution éventuelle de cette formulation est appelée *solution faible* du problème. Il suffit d'avoir  $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$  pour que ce problème soit défini alors qu'il fallait  $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$  pour l'EDP initiale (4).

Cependant, pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram (théorème 6) au problème (10), il faudrait que  $u$  et  $v$  appartiennent au même espace. En appliquant le théorème 3 de relèvement à  $g_d$  que l'on suppose dans la suite dans  $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_D)$ , on obtient l'existence<sup>4</sup> de la décomposition :

$$u = \bar{u} + u_g, \quad (13)$$

où  $\bar{u} \in \mathcal{H}_{0, \Gamma_D}^1(\Omega)$  et  $u_g \in \mathcal{H}_{g_d, \Gamma_D}^1(\Omega)$  tel que  $\gamma_D(u_g) = g_d$ . La formulation variationnelle (10) se réécrit alors :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \bar{u} \in \mathcal{H}_{0, \Gamma_D}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ & \forall v \in \mathcal{H}_{0, \Gamma_D}^1(\Omega), a(\bar{u}, v) = \ell(v) - a(u_g, v). \end{aligned} \quad (14)$$

Etudions maintenant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram pour justifier l'existence et l'unicité de la solution de (14). Les hypothèses (9a-9g) permettent de justifier l'existence de la forme bilinéaire  $a$  définie par (11) sur  $\mathcal{H}_{0, \Gamma_D}^1(\Omega)$  et de prouver sa continuité. En effet, pour tout  $(u, v) \in \mathcal{H}_{0, \Gamma_D}^1(\Omega)^2$  :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| & \leq \|c\|_{\infty} \cdot \|u\|_{0, \Omega} \cdot \|v\|_{0, \Omega} + 2 \|\Phi\|_{\infty} \cdot \|v\|_{0, \Omega} \cdot |u|_{1, \Omega} + 4 \|\mathbf{K}\|_{\infty} \cdot |u|_{1, \Omega} \cdot |v|_{1, \Omega} \\ & \quad + |\alpha_r| \cdot \|\gamma_R(u)\|_{0, \Gamma_R} \cdot \|\gamma_R(v)\|_{0, \Gamma_R} \\ & \leq \|c\|_{\infty} \cdot \|u\|_{1, \Omega} \cdot \|v\|_{1, \Omega} + 2 \|\Phi\|_{\infty} \cdot \|v\|_{1, \Omega} \cdot \|u\|_{1, \Omega} + 4 \|\mathbf{K}\|_{\infty} \cdot \|u\|_{1, \Omega} \cdot \|v\|_{1, \Omega} \\ & \quad + |\alpha_r| C_{\gamma}^2 \cdot \|u\|_{1, \Omega} \cdot \|v\|_{1, \Omega} \\ & \leq C_a^+ \cdot \|u\|_{1, \Omega} \cdot \|v\|_{1, \Omega} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par le théorème 1 de trace. On a noté ici :

$$\|u\|_{0, \Omega}^2 = \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy \quad ; \quad |u|_{1, \Omega}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy \quad ; \quad \|u\|_{1, \Omega}^2 = \|u\|_{0, \Omega}^2 + |u|_{1, \Omega}^2;$$

$$\|\Phi\|_{\infty} = \sup_{i=1,2} \|\Phi_i\|_{\infty} \quad ; \quad \|\mathbf{K}\|_{\infty} = \sup_{i,j=1,2} \|\mathbf{K}_{ij}\|_{\infty}.$$

A noter que la forme bilinéaire  $a$  est symétrique si et seulement si  $\Phi \equiv 0$ . De la même manière, le second membre défini par (14) et (12) est une forme linéaire continue sur l'espace  $\mathcal{H}_{0, \Gamma_D}^1(\Omega)$  (en utilisant la continuité de  $a$  prouvée précédemment). Etudions ensuite la coercivité de  $a$ . On est amené à faire les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} C_{c, \Phi} & := \inf_{x \in \Omega} \left( c - \frac{1}{2} \nabla \cdot \Phi \right) > 0, \end{aligned} \right. \quad (15a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \inf_{\sigma \in \Gamma_R} \left( \alpha_r + \frac{1}{2} \Phi(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma) \right) & \geq 0, \end{aligned} \right. \quad (15b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \{ \sigma \in \partial \Omega : \Phi(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma) < 0 \} & \subset \Gamma_D, \end{aligned} \right. \quad (15c)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \exists \alpha_{\mathbf{K}} > 0, \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \langle \mathbf{K}(x)\xi, \xi \rangle & \geq \alpha_{\mathbf{K}} \|\xi\|^2. \end{aligned} \right. \quad (15d)$$

4. Il n'y a pas unicité du relèvement et l'on n'a pas non plus de formule explicite pour  $u_g$ . Le relèvement n'a cependant qu'un intérêt théorique car il permet de prouver l'existence d'une solution pour le problème non homogène. En revanche, au niveau numérique, on contourne le problème comme on le verra au paragraphe Discrétisation.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \int_{\Omega} c(x, y) u(x, y)^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi(x, y) \cdot \nabla (u(x, y)^2) dx dy \\
&\quad + \int_{\Omega} \langle \mathbf{K} \nabla u, \nabla u \rangle (x, y) dx dy + \alpha_r \int_{\Gamma_R} u(\sigma)^2 d\sigma \\
&= \int_{\Omega} \left( c - \frac{1}{2} \nabla \cdot \Phi \right) (x, y) u(x, y)^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} (\Phi(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma)) u(\sigma)^2 d\sigma \\
&\quad + \int_{\Omega} \langle \mathbf{K} \nabla u, \nabla u \rangle (x, y) dx dy + \int_{\Gamma_R} \left( \alpha_r + \frac{1}{2} \Phi(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma) \right) u(\sigma)^2 d\sigma. \quad (16)
\end{aligned}$$

Sous les hypothèses (15a-15d), la dernière égalité fournit l'inégalité suivante, les intégrales de bord sur  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_R$  étant positives :

$$a(u, u) \geq C_{c, \Phi} \|u\|_{0, \Omega}^2 + \alpha_{\mathbf{K}} |u|_{1, \Omega}^2 \geq \underbrace{\min(C_{c, \Phi}, \alpha_{\mathbf{K}})}_{C_{a,1}^-} \left( \|u\|_{0, \Omega}^2 + |u|_{1, \Omega}^2 \right) = C_{a,1}^- \|u\|_{1, \Omega}^2. \quad (17)$$

A noter que si  $C_{c, \Phi} < 0$ , i.e. que l'hypothèse (15a) est fausse, on peut remplacer cette dernière condition par la condition moins restrictive :

$$C_{c, \Phi} > -C_P(\Omega) \alpha_{\mathbf{K}}, \quad (18)$$

où  $C_P(\Omega)$  est la constante de l'inégalité de Poincaré (propriété 1). On utilise cette inégalité pour prouver que :

$$\int_{\Omega} \left( c - \frac{1}{2} \nabla \cdot \Phi \right) (x, y) u(x, y)^2 dx dy \geq \underbrace{C_{c, \Phi}}_{< 0} \|u\|_{0, \Omega}^2 \geq \frac{C_{c, \Phi}}{C_P(\Omega)} |u|_{1, \Omega}^2,$$

de sorte que, en repartant de l'égalité (16), toujours sous les hypothèses (15b-15d) ainsi que (18), d'après Poincaré :

$$a(u, u) \geq \left( \alpha_{\mathbf{K}} + \frac{C_{c, \Phi}}{C_P(\Omega)} \right) |u|_{1, \Omega}^2 \geq \underbrace{\frac{C_P(\Omega)}{1 + C_P(\Omega)} \left( \alpha_{\mathbf{K}} + \frac{C_{c, \Phi}}{C_P(\Omega)} \right)}_{C_{a,2}^-} \|u\|_{1, \Omega}^2. \quad (19)$$

Que l'on utilise le résultat (17) ou (19), on obtient la coercivité de  $a$  et l'on satisfait à toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. Il existe donc une unique solution  $\bar{u}$  du problème (14). On obtient donc l'existence d'une solution pour la formulation (10). On pourrait alors penser que la non-unicité du relèvement  $u_g$  de  $g$  entraîne la non-unicité de la solution de (10). Cependant, si l'on considère deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  dans  $\mathcal{H}_{g_d, \Gamma_D}^1(\Omega)$  de (10), alors  $u_1 - u_2 \in \mathcal{H}_{0, \Gamma_D}^1(\Omega)$  et :

$$\|u_1 - u_2\|_{1, \Omega}^2 \leq \frac{a(u_1 - u_2, u_1 - u_2)}{C_a^-} = \frac{a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2)}{C_a^-} = \frac{\ell(u_1 - u_2) - \ell(u_1 - u_2)}{C_a^-} = 0.$$

D'où  $u_1 = u_2$  et il y a unicité de la solution de (10). Le problème est alors bien posé au sens où l'on a existence et unicité de la solution ainsi que la majoration :

$$\|u\|_{1, \Omega} \leq C \left( \|f\|_{0, \Omega} + \|g_n\|_{0, \Gamma_N} + \|g_r\|_{0, \Gamma_R} + \|g_d\|_{1/2, \Gamma_D} \right). \quad (20)$$

En effet, par définition de  $\bar{u}$ , en utilisant la coercivité et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
C_a^- \|\bar{u}\|_{1, \Omega}^2 &\leq a(\bar{u}, \bar{u}) = \ell(\bar{u}) - a(u_g, \bar{u}) \\
&\leq \|f\|_{0, \Omega} \|\bar{u}\|_{0, \Omega} + \|g_n\|_{0, \Gamma_N} \|\gamma_N(\bar{u})\|_{0, \Gamma_N} + \|g_r\|_{0, \Gamma_R} \|\gamma_R(\bar{u})\|_{0, \Gamma_R} + C_a^+ \|\bar{u}\|_{1, \Omega} \|u_g\|_{1, \Omega} \\
&\leq \|f\|_{0, \Omega} \|\bar{u}\|_{1, \Omega} + C_{\gamma} (\|g_n\|_{0, \Gamma_N} + \|g_r\|_{0, \Gamma_R}) \|\bar{u}\|_{1, \Omega} + C_a^+ C_R(\Omega) \|\bar{u}\|_{1, \Omega} \|g_d\|_{1/2, \Gamma_D},
\end{aligned}$$

par continuité des applications traces et par relèvement (pour la constante  $CR(\Omega)$ , voir le théorème 3). En simplifiant par  $\|\bar{u}\|_{1,\Omega}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\Omega} = \|\bar{u} + u_g\|_{1,\Omega} &\leq \|\bar{u}\|_{1,\Omega} + \|u_g\|_{1,\Omega} \\ &\leq \frac{1}{C_a} \left( \|f\|_{0,\Omega} + C_\gamma (\|g_n\|_{0,\Gamma_N} + \|g_r\|_{0,\Gamma_R}) + C_a^+ CR(\Omega) \|g_d\|_{1/2,\Gamma_D} \right) + CR(\Omega) \|g_d\|_{1/2,\Gamma_D}, \end{aligned}$$

en réutilisant le théorème de relèvement. On obtient donc bien la majoration (20), qui assure la continuité de l'application<sup>5</sup> qui aux données  $(f, g_d, g_n, g_r)$  associe l'unique solution  $u \in \mathcal{H}_{g_d, \Gamma_D}^1(\Omega)$  de (10).

### 3 Discrétisation

#### 3.1 Sous-espaces de dimension finie et bases

On recouvre l'ouvert polygonal  $\Omega$  par une réunion disjointe de triangles  $\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_t} T_k$ . On suppose  $\Omega = \Omega_h$ . On note :

$$X_h^1 = \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega) \mid \forall k \in \llbracket 1, n_t \rrbracket, v|_{T_k} \in \mathbb{P}_1\} \quad \text{où } \mathbb{P}_1 = \mathbb{R}_1[X, Y].$$

On pose alors :  $V_h = \mathcal{H}^1(\Omega) \cap X_h^1$ .  $V_h$  a pour dimension le nombre  $n_s$  de sommets du maillage. Soit  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n_s}$  la base de  $V_h$  telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n_s \rrbracket^2, \varphi_i(q^j) = \delta_{ij}.$$

Ainsi, à chaque sommet  $q^i$  du maillage est associé une unique fonction de base  $\varphi_i$  qui prend la valeur 1 en  $q^i$  et 0 en chacun des autres sommets. On note :

$$\mathcal{I} = \{i \in \llbracket 1, n_s \rrbracket \mid q^i \in \Gamma_D\} \quad \text{et} \quad \mathcal{J} = \llbracket 1, n_s \rrbracket \setminus \mathcal{I}.$$

En particulier, on en déduit que tout  $u_h \in V_h^g = \mathcal{H}_{g_d, \Gamma_D}^1(\Omega) \cap X_h^1$  et tout  $v_h \in V_h^0 = \mathcal{H}_{0, \Gamma_D}^1(\Omega) \cap X_h^1$  vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, u_h(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} g_d(q^i) \varphi_i(x) + \sum_{i \in \mathcal{J}} u_h(q^i) \varphi_i(x) \quad \text{et} \quad v_h(x) = \sum_{i \in \mathcal{J}} v_h(q^i) \varphi_i(x). \quad (21)$$

$V_h^0$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  de base  $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{J}}$ . A noter que le support de la fonction  $\varphi_i$  est l'ensemble des triangles dont  $q^i$  est sommet. Réciproquement, il n'existe que trois fonctions de base non nulles sur un triangle du maillage, celles qui prennent la valeur 1 en un des trois sommets.

#### 3.2 Problème variationnel discret

On considère le problème variationnel :

---


$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_h \in V_h^g \text{ tel que :} \\ &\forall v_h \in V_h^0, a(u_h, v_h) = \ell(v_h). \end{aligned} \quad (22)$$


---

Par un raisonnement analogue à la partie précédente, on montre que (22) admet une unique solution. En effet, on applique le théorème de Lax-Milgram au problème homogène suivant :

---


$$\begin{aligned} &\text{Trouver } w_h \in V_h^0 \text{ tel que :} \\ &\forall v_h \in V_h^0, a(w_h, v_h) = \tilde{\ell}(v_h). \end{aligned} \quad (23)$$


---

5. Cette application est bien définie par le théorème de Lax-Milgram et les considérations précédentes.

$V_h^0$  est un espace de Hilbert car sous espace vectoriel fermé (dimension finie) de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ . D'autre part,  $a$  et  $\tilde{\ell}$  sont respectivement coercive bilinéaire sur  $V_h^0 \times V_h^0$  et linéaire sur  $V_h^0$ , continues, ces propriétés étant conservées par restriction à un sous espace vectoriel.

En conclusion, le problème (22) admet une unique solution. Montrons qu'il est équivalent à la résolution d'un système linéaire. En effet, le problème (22) est satisfait pour tout  $v_h \in V_h^0$  si et seulement s'il est vrai pour tous les vecteurs  $\varphi_i$  de la base de  $V_h^0$  :

---


$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_h \in V_h^g \text{ tel que :} \\ &\forall i \in \mathcal{J}, a(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i). \end{aligned} \tag{24}$$


---

En utilisant la projection (21) et la linéarité de  $a$  à gauche, on obtient l'équivalence de (24) avec :

---


$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_h \in V_h^g \text{ tel que :} \\ &\forall i \in \mathcal{J}, \sum_{j \in \mathcal{I}} g_d(q^j) a(\varphi_j, \varphi_i) + \sum_{j \in \mathcal{J}} u_h(q^j) a(\varphi_j, \varphi_i) = \ell(\varphi_i). \end{aligned} \tag{25}$$


---

D'autre part, sachant que  $V_h$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^{n_s}$ , on identifie  $u_h$  à ses coordonnées  $U_h = (u_i)_{1 \leq i \leq n_s} \in \mathbb{R}^{n_s}$  où  $u_i = u_h(q^i)$  dans la base  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n_s}$ . Soit :

---


$$\begin{aligned} &\text{Trouver } U_h = (u_i) \in \mathbb{R}^{n_s} \text{ tel que :} \\ &\forall i \in \mathcal{I}, \quad u_i = g_d(q^i), \\ &\forall i \in \mathcal{J}, \quad \sum_{j=1}^{n_s} u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = \ell(\varphi_i). \end{aligned} \tag{26}$$


---

(26) est un système linéaire de  $n_s$  équations à  $n_s$  inconnues, que l'on peut encore écrire :

---


$$\begin{aligned} &\text{Trouver } U_h \in \mathbb{R}^{n_s} \text{ tel que :} \\ &AU_h = b, \end{aligned} \tag{27}$$

où la matrice  $A \in \mathcal{M}_{n_s}(\mathbb{R})$  et le vecteur  $b \in \mathbb{R}^{n_s}$  ont pour coefficients :

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= a(\varphi_j, \varphi_i) \quad \text{et} \quad b_i = \ell(\varphi_i) \quad \text{pour } (i,j) \in \mathcal{J} \times \llbracket 1, n_s \rrbracket, \\ A_{i,j} &= \delta_{ij} \quad \text{et} \quad b_i = g_d(q^i) \quad \text{pour } (i,j) \in \mathcal{I} \times \llbracket 1, n_s \rrbracket. \end{aligned}$$


---

Justifions l'existence et l'unicité de la solution de ce système linéaire. En effet, la matrice  $A$  a pour déterminant, après développements par rapport aux lignes correspondant aux indices de  $\mathcal{I}$  :

$$\det(A) = \det(\tilde{A}),$$

où la matrice  $\tilde{A}$  est la matrice extraite de  $A$ , carrée d'ordre  $Card \mathcal{J}$  et de coefficients :

$$\tilde{A}_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j).$$

La matrice  $\tilde{A}$  est ainsi la restriction de  $A$  à  $V_h^0 \simeq \mathbb{R}^{Card \mathcal{J}}$ . Les indices  $i$  et  $j$  ne correspondent pas à ceux de  $A$  puisque l'on a retiré les indices de  $\mathcal{I}$ .  $\tilde{A}$  est par ailleurs symétrique (par symétrie de  $a$ ) et définie positive :

$$\forall X_h \in \mathbb{R}^{Card \mathcal{J}}, X_h \neq 0, \langle \tilde{A}X_h, X_h \rangle = \sum_{i,j} x_i x_j a(\varphi_i, \varphi_j) = a(x_h, x_h) \geq \eta \|x_h\|_{1,\Omega}^2 > 0.$$

où  $x_h = \sum_{j \in \mathcal{J}} x_j \varphi_j \in V_h^0$ .

Notons enfin que si le relèvement était d'un intérêt théorique capital pour la démonstration du caractère bien posé du problème continu, il s'avère être inutile dans la résolution numérique, puisque l'on traite la condition aux limites de Dirichlet directement.

## 4 Notion de conditions de transmission

Le but de cette sous-partie est de montrer que pour une décomposition en sous-domaines de  $\Omega$ , il y a continuité de certaines quantités, qui doivent donc inspirer les conditions aux limites que l'on doit appliquer sur l'interface créée par le découpage.

On partitionne  $\Omega$  en deux ouverts (disjoints ou non)  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On note dans cette partie  $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \bar{\Omega}_j$  et  $\tilde{\Omega} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ , ainsi que  $\mathbf{n}_i$  la normale extérieure à  $\Omega_i$ .

On considère alors le problème modèle simplifié ( $\Phi = 0$ ,  $\mathbf{K} = \lambda \mathcal{I}$ ,  $g_d = 0$ ,  $\Gamma_D = \partial\Omega$ ) :

$$\begin{cases} cu - \lambda \Delta u = f, & [\Omega] \\ u = 0, & [\partial\Omega] \end{cases} \quad (28)$$

où  $c$  est une fonction bornée et minorée par une constante strictement positive presque partout (15a),  $\lambda$  un réel strictement positif (15d) et  $f \in L^2(\Omega)$  par (9g).

Si l'on note  $u_i = u|_{\Omega_i}$ , alors  $u_i$  est solution du problème :

$$\begin{cases} cu_i - \lambda \Delta u_i = f, & [\Omega_i] \\ u_i = 0, & [\partial\Omega \cap \partial\Omega_i] \end{cases} \quad (29)$$

Le problème (29) est mal posé au sens où il manque une condition aux limites sur  $\Gamma_{ij}$ .

La formulation variationnelle associée à (28) :

$$\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x) dx + \lambda \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx,$$

peut se récrire sous deux formes, en utilisant le fait que  $\Omega = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \setminus \tilde{\Omega}$  :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad & \int_{\Omega_1} c(x)u_1(x)v(x) dx + \lambda \int_{\Omega_1} \nabla u_1(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ & + \int_{\Omega_2} c(x)u_2(x)v(x) dx + \lambda \int_{\Omega_2} \nabla u_2(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ & - \int_{\tilde{\Omega}} c(x)u_1(x)v(x) dx - \lambda \int_{\tilde{\Omega}} \nabla u_1(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ & = \int_{\Omega_1} f(x)v(x) dx + \int_{\Omega_2} f(x)v(x) dx - \int_{\tilde{\Omega}} f(x)v(x) dx, \end{aligned} \quad (30)$$

ou :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad & \int_{\Omega_1} c(x)u_1(x)v(x) dx + \lambda \int_{\Omega_1} \nabla u_1(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ & + \int_{\Omega_2} c(x)u_2(x)v(x) dx + \lambda \int_{\Omega_2} \nabla u_2(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ & - \int_{\tilde{\Omega}} c(x)u_2(x)v(x) dx - \lambda \int_{\tilde{\Omega}} \nabla u_2(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ & = \int_{\Omega_1} f(x)v(x) dx + \int_{\Omega_2} f(x)v(x) dx - \int_{\tilde{\Omega}} f(x)v(x) dx. \end{aligned} \quad (31)$$

D'autre part, on peut établir une formulation variationnelle sur  $\Omega_i$  :

$$\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_i), \quad \int_{\Omega_i} c(x)u_i(x)v(x) dx + \lambda \int_{\Omega_i} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v(x) dx - \lambda \int_{\Gamma_{ij}} \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}_i} v d\sigma = \int_{\Omega_i} f(x)v(x) dx. \quad (32)$$

En utilisant les égalités (32) pour les deux sous-domaines dans l'égalité (30), on obtient :

$$\lambda \int_{\Gamma_{12}} \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_1} v \, d\sigma + \lambda \int_{\Gamma_{21}} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}_2} v \, d\sigma - \int_{\tilde{\Omega}} c(x) u_1(x) v(x) \, dx - \lambda \int_{\tilde{\Omega}} \nabla u_1(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = - \int_{\tilde{\Omega}} f(x) v(x) \, dx. \quad (33)$$

Par ailleurs, en appliquant la formule de Green pour le laplacien sur  $\tilde{\Omega}$ , on a :

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla u_1(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Gamma_{21}} \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_2} v \, d\sigma + \int_{\Gamma_{12}} \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_1} v \, d\sigma - \int_{\tilde{\Omega}} v(x) \Delta u_1(x) \, dx. \quad (34)$$

En insérant le résultat (34) dans l'égalité (33), il reste :

$$\lambda \int_{\Gamma_{21}} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}_2} v \, d\sigma - \lambda \int_{\Gamma_{21}} \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_2} v \, d\sigma = \int_{\tilde{\Omega}} \underbrace{[c(x) u_1(x) - \lambda \Delta u_1(x) - f(x)]}_{=0} v(x) \, dx. \quad (35)$$

Ce résultat est vrai en particulier pour tout  $v \in \mathcal{H}^1(\tilde{\Omega}) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ . Le résultat de densité du théorème de trace permet de conclure sur la condition de transmission exacte entre deux sous-domaines :

$$\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}_2} = \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_2}, \quad [\Gamma_{21}] \quad (36)$$

L'autre condition de transmission résulte aussi du théorème de trace et s'écrit :

$$u_1 = u_2, \quad [\Gamma_{21}] \quad (37)$$

En appliquant rigoureusement les mêmes raisonnements à l'égalité (31), on obtient les conditions de transmission sur  $\Gamma_{12}$  :

$$u_1 = u_2, \quad [\Gamma_{12}] \quad (38)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}_1}, \quad [\Gamma_{12}] \quad (39)$$

En effectuant les mêmes calculs dans l'ordre inverse, on montre que si l'on résout les deux problèmes couplés (29) pour  $i = 1, 2$  avec les conditions de transmission (36)-(39) sur les interfaces, on obtient la solution de (28).

## 5 Applications

### 5.1 Problème de Laplace-Neumann

Pour  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$ , on considère l'EDP suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (40a) \quad (40b)$$

Cette équation se trouve notamment en thermique pour l'équation de la chaleur stationnaire,  $f$  représentant le terme de source et  $g$  le terme de flux au niveau des parois. Ce système est un cas particulier de (4) pour  $c = 0$ ,  $\Phi = 0$ ,  $\mathbf{K} = \mathcal{I}$ ,  $\Gamma_N = \partial\Omega$ . On ne peut pas appliquer les résultats de la partie 2 car l'étude a été faite sur  $\mathcal{H}_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$  avec  $\sigma(\Gamma_D) > 0$ , ce qui n'est pas le cas ici.

#### 5.1.1 Équation de compatibilité

L'existence d'une solution du problème (40a-40b) repose en premier lieu sur le constat qu'en intégrant (40a) sur  $\Omega$  et en appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = - \int_{\Omega} \Delta u(x) \, dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\sigma) \, d\sigma = - \int_{\partial\Omega} g(\sigma) \, d\sigma,$$

soit :

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(\sigma) d\sigma = 0. \quad (41)$$

L'égalité (41) est une condition nécessaire et en fait suffisante, comme nous le verrons ensuite, d'existence d'une solution<sup>6</sup>. Elle traduit, dans le cadre de l'équation de la chaleur, l'équilibre entre les termes de source et de flux<sup>7</sup>, nécessaire pour assurer l'existence d'un état stationnaire.

### 5.1.2 Absence d'origine

D'autre part, on remarque que si  $u$  est solution de (40a-40b),  $u + c$  est également solution, quelle que soit la constante  $c \in \mathbb{R}$  (admissible car  $\Omega$  borné). Ceci impose de rajouter de manière formelle une condition pour fixer la constante. Parmi les méthodes existantes<sup>8</sup>, on choisit de travailler sur l'espace  $\mathcal{V}$  des fonctions de moyenne nulle.

Il faut remarquer qu'imposer à  $u$  d'être de moyenne nulle n'est EN AUCUN CAS RESTRICTIF puisque si  $u_0$  est solution,  $u_0 - m(u_0)$  est solution et de moyenne nulle. Si  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  sont solutions de (40a-40b), on a :

$$\forall w \in \mathcal{H}^1(\Omega), a(u, w) = L(w) = a(v, w) \text{ soit } a(u - v, w) = 0.$$

En prenant  $w = u - v$ , on obtient :  $a(u - v, u - v) = \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$  et donc  $u$  et  $v$  sont égales à une constante près presque partout. Ainsi, en connaissant **la** solution de (40a-40b) de moyenne nulle, on connaît (presque partout) toutes les autres par addition d'une constante.

### 5.1.3 Résolution sur $\mathcal{V}$

On cherche ici à prouver l'existence et l'unicité d'une solution de (40a-40b) dans  $\mathcal{V}$ . La formulation variationnelle associée au problème est donc :

Trouver  $u \in \mathcal{V}$  tel que :

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega), a(u, v) = L(v), \quad (42)$$

$$\text{où } a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \text{ et } L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(\sigma) v(\sigma) d\sigma.$$

Cependant, pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution, on utilise la formulation variationnelle **équivalente** suivante :

Trouver  $u \in \mathcal{V}$  tel que :

$$\forall v \in \mathcal{V}, a(u, v) = L(v). \quad (43)$$

PREUVE. Montrons en effet que les formulations variationnelles (42) et (43) sont équivalentes. Si  $u$  est solution de (42), comme  $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$ ,  $u$  est solution de (43).

Réciproquement, si  $u$  est solution de (43), soit  $w \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ . On pose  $v = w - m(w) \in \mathcal{V}$ . On a donc :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(\sigma) v(\sigma) d\sigma,$$

soit :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx - \int_{\Omega} f(x) w(x) dx - \int_{\partial\Omega} g(\sigma) w(\sigma) d\sigma = -m(w) \left( \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(\sigma) d\sigma \right) = 0. \quad \blacksquare$$

Montrons ensuite que le problème variationnel (42) est équivalent au problème (40a-40b). En effet, si  $u$  est solution de (42), par formule de Green, on a :

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega), - \int_{\Omega} (\Delta u + f)(x) v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \left( g - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) (\sigma) v(\sigma) d\sigma. \quad (44)$$

En prenant  $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  (qui est dense dans  $L^2(\Omega)$ ), on a :  $-\Delta u + f = 0$  sur  $\Omega$  (40a). Puis, en reprenant (44), on obtient :  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g$  sur  $\partial\Omega$  (40b), par densité de  $\gamma(\mathcal{H}^1(\Omega)) = \mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ .

6. Mais en aucun cas d'unicité.

7. i.e. entre "ce qui rentre" et "ce qui sort".

8. On aurait pu par exemple quotienter  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  par l'ensemble des fonctions constantes sur  $\Omega$ .

### 5.1.4 Existence et unicité de la solution de (43)

$a$  et  $L$  sont (bi)linéaires et continues sur  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ , donc sur  $\mathcal{V}$ . Reste à montrer la coercivité de  $a$  sur  $\mathcal{V}$ . Remarquons que, si  $v \in \mathcal{V}$ ,  $m(v) = 0$ . L'inégalité de **Poincaré-Wirtinger** s'écrit donc :

$$\exists C_{PW} > 0, \forall v \in \mathcal{V}, \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{PW} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = C_{PW} a(v, v).$$

$a$  est donc une norme équivalente à  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$  sur  $\mathcal{V}$  et  $a$  est coercive.

Par le théorème de **Lax-Milgram**, il existe une unique solution de (43) donc de (42).

### 5.1.5 Implémentation

On recouvre  $\Omega$  par un maillage triangulaire  $(T_i)_{1 \leq i \leq n_t}$  conforme, avec  $\bar{\Omega} = \cup_i T_i$ . On note  $(q^j)_{1 \leq j \leq n_s}$  les sommets du maillage.

On pose  $V_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega) \mid \forall i \leq n_t, v|_{T_i} \in \mathbb{P}_1\}$  et  $V_h^0 = \left\{v_h \in V_h \mid \int_{\Omega} v_h(x) dx = 0\right\} = \{v_h \in V_h \mid m(v_h) = 0\}$ .  $V_h$  et  $V_h^0$  sont des espaces vectoriels de dimensions finies respectives  $n_s$  et  $n_s - 1$ .

**Choix de la base** Soit  $\Phi = (\varphi_i)_{1 \leq i \leq n_s}$  une famille de  $V_h$  tel que :  $\varphi_i(q^j) = \delta_{ij}$ . On en déduit que  $\Phi$  est une base de  $V_h$ .

En effet, s'il existe des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_s}$  tels que :  $\sum_{i=1}^{n_s} \alpha_i \varphi_i \equiv 0$  sur  $\Omega$ , en évaluant l'expression en chaque sommet  $q^j$ , on obtient  $\alpha_j = 0$  et  $\Phi$  est une famille libre maximale (de cardinal  $n_s = \dim V_h$ ) donc une base de  $V_h$ .

---

On pose alors :  $\forall i \in \llbracket 1, n_s \rrbracket$ ,  $\psi_i = \varphi_i - m(\varphi_i)$ . Montrons que  $\Psi = (\psi_i)_{1 \leq i \leq n_s-1}$  est une base<sup>9</sup> de  $V_h^0$ .

---

Soit  $u \in V_h^0$ . En particulier,  $u \in V_h$  et se décompose sur la base  $\Phi$  :  $u = \sum_{i=1}^{n_s} u_i \varphi_i$ . La condition supplémentaire d'appartenance à  $V_h^0$  s'écrit :

$$\int_{\Omega} u(x) dx = 0 = \sum_{i=1}^{n_s} u_i \int_{\Omega} \varphi_i(x) dx \quad \text{soit} \quad \sum_{i=1}^{n_s} u_i m(\varphi_i) = 0,$$

en divisant par  $\mu(\Omega)$ . Donc :

$$u = \sum_{i=1}^{n_s} u_i \varphi_i - \sum_{i=1}^{n_s} u_i m(\varphi_i) = \sum_{i=1}^{n_s} u_i \psi_i. \tag{45}$$

A noter que  $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n_s}$  ne peut pas être une base de  $V_h^0$  car de cardinal  $n_s > n_s - 1 = \dim V_h^0$ .

On remarque que la fonction de  $V_h$  qui prend la valeur 1 en chacun des sommets du maillage est la fonction  $\sum_{i=1}^{n_s} \varphi_i = \mathbf{1}_{\Omega}$ . D'où :

$$\sum_{i=1}^{n_s} \psi_i = \sum_{i=1}^{n_s} \varphi_i - \sum_{i=1}^{n_s} m(\varphi_i) = \mathbf{1}_{\Omega} - m(\mathbf{1}_{\Omega}) = \mathbf{0}_{\Omega}.$$

---

9. On a choisi ici d'isoler l'élément  $n_s$  de la base, puisqu'il faut diminuer le cardinal de la famille d'un élément. Ce choix est purement arbitraire.



Donc :  $\psi_{n_s} = - \sum_{i=1}^{n_s-1} \psi_i$  et, en remplaçant dans (45) :

$$u = \sum_{i=1}^{n_s-1} (u_i - u_n) \psi_i = \sum_{i=1}^{n_s-1} \hat{u}_i \psi_i. \quad (46)$$

$\Psi$  est ainsi une famille génératrice de  $V_h^0$  minimale donc est une base de  $V_h^0$ .

Le choix d'éliminer la composante  $u_{n_s}$  de l'équation résulte d'une volonté de faciliter la programmation. Il est en effet plus aisé de supprimer les dernières ligne et colonne de la matrice de rigidité implémentée classiquement d'ordre  $n_s$  (de même de retirer le dernier élément d'un vecteur) plutôt que de retirer les premières et de décaler tous les éléments.

Le problème est cependant soulevé<sup>10</sup> de savoir si ce choix ne porte pas préjudice à la résolution dans le cas des fonctions très singulières au voisinage de  $q^{n_s}$ . Il faut rappeler que les sommets sont indicés aléatoirement par le mailleur.

On a au passage défini la projection de  $\mathbb{R}^{n_s}$  dans  $\mathbb{R}^{n_s-1}$  par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n_s - 1 \rrbracket, \hat{u}_i = u_i - u_{n_s}. \quad (47)$$

**Formulation variationnelle discrète** On considère le problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u_h \in V_h^0 \text{ tel que :} \\ \forall v_h \in V_h^0, a(u_h, v_h) = L(v_h), \end{aligned} \quad (48)$$

qui est équivalent (en tenant compte de la projection (47)) à :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{n_s-1}) \in \mathbb{R}^{n_s-1} \text{ tels que :} \\ \forall i \in \llbracket 1, n_s - 1 \rrbracket, \sum_{j=1}^{n_s-1} \hat{u}_j a(\psi_j, \psi_i) = L(\psi_i). \end{aligned} \quad (49)$$

Ce problème s'écrit encore sous la forme d'un système linéaire :  $\hat{\mathcal{R}}\hat{U} = \hat{b}$ , où  $\hat{\mathcal{R}}_{ij} = a(\psi_i, \psi_j) \in \mathcal{M}_{n_s-1}(\mathbb{R})$  et  $\hat{b}_i = L(\psi_i) \in \mathbb{R}^{n_s-1}$ .

La matrice du système linéaire est symétrique (par symétrie de  $a$ ) et définie positive (donc inversible) :

$$\langle \hat{\mathcal{R}}\hat{U}, \hat{U} \rangle = a(\hat{u}, \hat{u}) \geq \kappa \|\hat{u}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)},$$

où  $\hat{U} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{n_s-1})$  et  $\hat{u} = \sum_{i=1}^{n_s-1} \hat{u}_i \psi_i \in V_h^0 \subset \mathcal{V}$  sur lequel  $a$  est coercive.

Le fait que  $m(\varphi)$  soit une constante implique que le terme disparaît dans le gradient de la définition de  $a$  et :

$$a(\psi_i, \psi_j) = a(\varphi_i, \varphi_j).$$

On assemble donc la matrice de rigidité de manière classique, **à la différence près que le système est de taille plus petite** : on supprime uniquement les dernières ligne et colonne.

Donnons de même une autre expression de  $\hat{b}$ . On a, par linéarité de  $L$  :

$$L(\psi_i) = L(\varphi_i) - m(\varphi_i) \left( \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(\sigma) d\sigma \right) = L(\varphi_i),$$

---

10. Merci à Mme Ryan.

d'après (41), puis<sup>11</sup> :

$$\hat{b}(\Psi) = \bar{b}(\Phi).$$

En considération de (42), on aurait pu penser à programmer le problème variationnel discret sur  $V_h$  et non  $V_h^0$ . On aurait obtenu le système  $\mathcal{R}U = b$  de taille  $n_s$  (les coefficients étant **les mêmes** que précédemment).

Mais la condition de moyenne nulle n'aurait pas été prise en compte et on aurait eu à résoudre un système linéaire à  $n_s$  inconnues et  $n_s + 1$  équations. Ainsi, en utilisant la condition de moyenne nulle (équation  $n_s + 1$ ), on élimine une inconnue et en retirant les dernières ligne et colonne, on élimine une équation ( $n_s$ ). On résout donc  $\hat{\mathcal{R}}\hat{U} = \bar{b}$  (**le même**) de taille  $n_s - 1$ . La base  $\Psi$  n'est utile que pour établir le système linéaire et démontrer l'équivalence des différents problèmes.

L'inversion du système fournit les coordonnées  $\hat{u}_i$  de  $u_h$  dans la base  $\Psi$ . Pour retrouver les coordonnées  $u_i$  de  $u_h$  dans la base  $\Phi$ , on utilise (46) et, en notant  $\hat{u}_{n_s} = 0$  :

$$\sum_{i=1}^{n_s} u_i \int_{\Omega} \varphi_i = 0 = \sum_{i=1}^{n_s} (\hat{u}_i + u_{n_s}) \int_{\Omega} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n_s-1} \hat{u}_i \int_{\Omega} \varphi_i + u_{n_s} \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} \int_{\Omega} \varphi_i}_{\Upsilon_i},$$

soit :

$$u_{n_s} = -\frac{\langle \hat{U}, \tilde{\Upsilon} \rangle}{\mu(\Omega)},$$

$$\text{car : } \mu(\Omega) = \sum_{i=1}^{n_s} \int_{\Omega} \varphi_i(x) dx = \sum_{i=1}^{n_s} \Upsilon_i.$$

### 5.1.6 Problème de substitution par intégration de la contrainte

**Position du problème** L'idée est de rajouter un terme dans (40a) qui permette d'avoir la coercivité de la forme bilinéaire correspondante sur  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  et ainsi de pouvoir travailler directement sur un système de taille  $n_s$  avec les fonctions de base classiques dont on connaît l'expression. On ajoute donc la contrainte de moyenne nulle de la partie précédente dans l'EDP.

On considère le nouveau problème :

$$-\Delta u + \int_{\Omega} u(x) dx = f \quad \text{sur } \Omega \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (50)$$

La formulation variationnelle associée au problème est :

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \text{ telle que :} \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega), \quad a'(u, v) = L(v) \quad (51)$$

où  $a'(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \left( \int_{\Omega} u(x) dx \right) \left( \int_{\Omega} v(x) dx \right)$  et  $L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(\sigma) v(\sigma) d\sigma$ .  $a'$  et  $L$  sont (bi)linéaires et continues sur  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ . La coercivité résulte de l'inégalité de **Poincaré-Wirtinger** :

$$\begin{aligned} a'(u, u) &= \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \left( \int_{\Omega} u(x) dx \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2C_{PW}} \|u - m(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu(\Omega) \int_{\Omega} m(u)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \min\left(\frac{1}{2C_{PW}}, \mu(\Omega)\right) \int_{\Omega} |u(x) - m(u)|^2 + m(u)^2 dx \\ &\geq K(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) = K\|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

car  $A^2 + B^2 \geq \frac{1}{2}(A + B)^2$  soit  $|u - m(u)|^2 + m(u)^2 \geq \frac{1}{2}u^2$  et  $a'$  est coercive sur  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ .

11. Pour  $w \in \mathbb{R}^{n_s}$ , on note  $\bar{w}$  la restriction de  $w$  à  $\mathbb{R}^{n_s-1}$  en retirant la dernière composante.

Par le théorème de **Lax-Milgram**, il existe une unique solution de (51).

**Intérêt de la substitution** Prenons deux fonctions  $f$  et  $g$  satisfaisant la condition de compatibilité (41). Pour ces fonctions, la formulation variationnelle s'écrit en particulier avec  $v = \mathbf{1}_\Omega$  :

$$\int_{\Omega} u(x) dx \times \mu(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(\sigma) d\sigma = 0$$

Ainsi, si l'on prend des fonctions satisfaisant (41), on obtient par le second problème (50) une solution du premier problème (40a-40b).

Cependant, même si cette conclusion est astucieuse, la matrice du système est pleine. Les outils à utiliser pour inverser le système sont donc fondamentalement différents.

### 5.1.7 Problème de substitution par pénalisation

On considère le problème annexe :

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = f, & (52a) \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = g. & (52b) \end{cases}$$

A noter tout d'abord que pour  $\varepsilon > 0$ , le problème est classiquement bien posé. De la même manière que précédemment, en intégrant (52a), on obtient que la solution  $u_\varepsilon$  est de moyenne nulle si  $f$  et  $g$  vérifient la relation de compatibilité (41). De plus, on a, pour tout  $v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ , l'égalité variationnelle :

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx dy + \varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(\sigma) v(\sigma) d\sigma.$$

En soustrayant à cette dernière égalité la formulation (42), on obtient :

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla(u - u_\varepsilon) \cdot \nabla v dx dy = \varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) v(x) dx, \quad (53)$$

où  $u$  est la solution de moyenne nulle de (40a-40b) et  $u_\varepsilon$  celle de (52a-52b). Par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, sachant que  $m(u - u_\varepsilon) = 0$  et en appliquant (53) pour  $v = u - u_\varepsilon$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u - u_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 &\leq C_{PW} \int_{\Omega} |\nabla(u - u_\varepsilon)|^2(x) dx = \varepsilon C_{PW} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) (u - u_\varepsilon)(x) dx \\ &\leq \varepsilon C_{PW} \|u_\varepsilon\|_{0,\Omega} \left( \|u\|_{0,\Omega} - \|u_\varepsilon\|_{0,\Omega} \right). \end{aligned}$$

Comme le membre de gauche est positif, il est en de même pour le membre de droite et on en déduit que :

$$\|u_\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq \|u\|_{0,\Omega}. \quad (54)$$

En insérant cette majoration dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\|u - u_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq C_{PW} \|u - u_\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 \leq \varepsilon C_{PW} \|u\|_{0,\Omega}^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

ce qui prouve que  $u_\varepsilon$  converge vers  $u$  dans  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ .

**Remarque** L'inégalité (54) montre en particulier que  $u_\varepsilon$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$  quel que soit  $\varepsilon > 0$ . Elle justifie le terme de pénalisation au sens où en ajoutant un terme d'ordre 0 dans l'EDP (40a), on obtient une solution de norme plus petite. On peut donc résoudre ce problème bien posé pour approcher la solution de moyenne nulle de (40a-40b), même si le conditionnement de la matrice  $\mathcal{R} + \varepsilon\mathcal{M}$  se dégrade lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

## 5.2 Flot optique

Les travaux présentés dans la partie suivante sont les fruits d'un stage ingénieur de 3<sup>eme</sup> année. On s'intéresse ici à une EDP vectorielle dans  $\mathbb{R}^2$  comprenant un terme de diffusion et un terme de réaction anisotrope.

### 5.2.1 Position du problème

En traitement d'images, le flot optique désigne le champ de vitesse du mouvement apparent observé sur une succession d'images. L'estimation de ce flot optique donne lieu à un certain nombre de méthodes, généralement basées sur la minimisation d'une fonctionnelle de coût. On détaille ici une technique alliant régularisation quadratique et linéarisation de type Gauss-Newton couplées avec une méthode de décomposition de domaine. On considère deux images successives  $I_1$  et  $I_2$  séparées d'un temps  $\delta t$ . On suppose que l'intensité est une fonction régulière en espace et en temps, de sorte que  $I_1(x, y) = I(x, y, t)$  et  $I_2(x, y) = I(x, y, t + \delta t)$ .

Dans la suite, on cherche à minimiser l'une des deux fonctionnelles suivantes, qui correspondent à deux approches différentes du problème :

$$\mathcal{J}_0(u, v) = \int_{\Omega} \left( u \frac{\partial I}{\partial x} + v \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial t} \right)^2 dx dy + \lambda \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)(x, y) dx dy, \quad (55)$$

$$\mathcal{J}_1(u, v) = \int_{\Omega} (I(x, y, t + \delta t) - I(x - u \cdot \delta t, y - v \cdot \delta t, t))^2 dx dy + \lambda \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)(x, y) dx dy. \quad (56)$$

La fonctionnelle  $\mathcal{J}_0$  est quadratique et on aboutit à l'EDP :

$$-\lambda \Delta \mathbf{U} + (\nabla I \cdot \mathbf{U}) \nabla I = -\frac{\partial I}{\partial t} \nabla I. \quad (57)$$

La condition aux limites naturelle qui s'impose dans ce contexte est une condition de Neumann homogène. Une condition de Dirichlet assurerait le caractère bien-posé immédiatement mais n'est pas compatible avec le cadre du flot optique, qui n'est *a priori* pas imposé sur la frontière de l'image.

En revanche, la fonctionnelle  $\mathcal{J}_1$  étant non-quadratique, la formulation variationnelle associée (et donc l'EDP) n'est pas linéaire. On procède alors à des linéarisations successives de (56) en construisant une suite  $(\mathbf{U}^n)$  par :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \delta \mathbf{U}^n$$

où  $\delta \mathbf{U}^n$  est minimiseur de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^n(\delta u^n, \delta v^n) &= \int_{\Omega} (I(x, y, t + \delta t) - I(x - u^n \delta t, y - v^n \delta t, t) + \delta t \delta \mathbf{U}^n \cdot \nabla I(x - u^n \delta t, y - v^n \delta t, t))^2(x, y) dx dy \\ &+ \lambda \int_{\Omega} (|\nabla u^n + \nabla \delta u^n|^2 + |\nabla v^n + \nabla \delta v^n|^2)(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (58)$$

La minimisation de (58) se fait sur  $\mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{H}^1(\Omega)$ . L'EDP correspondant aux équations d'Euler-Lagrange pour ce problème s'écrit :

$$-\frac{\lambda}{\delta t^2} \Delta \delta \mathbf{U}^n + [(\nabla I_1)^{\{n\}} \cdot \delta \mathbf{U}^n] (\nabla I_1)^{\{n\}} = -\frac{I_2 - I_1^{\{n\}}}{\delta t} (\nabla I_1)^{\{n\}} + \frac{\lambda}{\delta t^2} \Delta \mathbf{U}^n, \quad (59)$$

avec une condition de Neumann homogène :

$$\frac{\partial \delta \mathbf{U}^n}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (60)$$

où  $f^{\{n\}}(x, y) = f(x - u^n t, y - v^n t)$ ,  $t$  étant un paramètre fictif fixé.

Quelle que soit l'approche utilisée, on est ramené à résoudre le problème général à chaque itération :

$$\begin{cases} -\lambda \Delta \tilde{\mathbf{U}} + \mathcal{G} \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \end{cases} \quad (61)$$

où  $\mathcal{G}$  est une matrice carrée  $2 \times 2$  symétrique positive de la forme  $\alpha \mathbf{v} \cdot {}^t \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ . Le système (61) peut se récrire sous la forme de deux équations scalaires couplées :

$$\begin{cases} -\lambda \Delta \tilde{u} + \mathcal{G}_{11} \tilde{u} + \mathcal{G}_{12} \tilde{v} = \mathbf{f}_1, \\ -\lambda \Delta \tilde{v} + \mathcal{G}_{21} \tilde{u} + \mathcal{G}_{22} \tilde{v} = \mathbf{f}_2. \end{cases} \quad (62a)$$

(61) est bien posé lorsque le tenseur  $\mathcal{G}$  est borné et que ses deux valeurs propres sont positives et bornées inférieurement positivement.

C'est à (61) que l'on applique la méthode de décomposition de domaine. La discrétisation ÉLÉMENTS FINIS sur maillage cartésien uniforme fournit une matrice de rigidité assemblée à l'aide de matrices élémentaires *constantes*, et une matrice de "masse" pondérée par  $\mathcal{G}$ . Plus  $\lambda$  est grand, mieux le système est conditionné.

### 5.2.2 Méthode FETI-2LM

On considère le problème modèle<sup>12</sup> :

$$\begin{cases} -\Delta w = f, & [\Omega] \\ w = \bar{w}. & [\partial\Omega] \end{cases} \quad (63)$$

On décompose  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  disjoints. On note  $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ ,  $\gamma_i = \partial\Omega \cap \partial\Omega_i$  et  $\mathbf{n}_i$  la normale extérieure à  $\Omega_i$ . Comme on l'a vu au paragraphe 4, le système (63) est équivalent aux deux problèmes :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & [\Omega_1] \\ u = \bar{w} & [\gamma_1] \end{cases} \quad (64)$$

$$\begin{cases} -\Delta v = f & [\Omega_2] \\ v = \bar{w} & [\gamma_2] \end{cases} \quad (65)$$

munis des conditions de transmission aux interfaces :

$$u = v \quad [\Gamma] \quad (66)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_2} = 0 \quad [\Gamma] \quad (67)$$

Après discrétisation, la matrice du système se récrit :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (68)$$

Les matrices  $A_{ij}$  contiennent les termes d'interaction de  $\Omega_i$  sur  $\Omega_j$ . Par exemple<sup>13</sup>, les éléments de  $A_{11}$  sont du type :

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_l \, dx dy$$

où  $M_k$  et  $M_l$  sont des points intérieurs à  $\Omega_1$ . Pour  $A_{33}$ , les éléments sont les interactions des points de l'interface entre eux. On peut les distinguer en deux familles, selon que l'intégration se fait sur un triangle appartenant au domaine  $\Omega_i$  (ces termes sont regroupés dans la matrice  $A_{33}^{(i)}$ ). De même que le problème continu, le problème discret (68) se découple en deux problèmes locaux,  $i \in \{1, 2\}$  :

$$\begin{pmatrix} A_{ii} & A_{i3} \\ A_{3i} & A_{33}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ f_3^{(i)} \end{pmatrix} \quad (69)$$

où  $f_3^{(1)} + f_3^{(2)} = f_3$  et  $A_{33}^{(1)} + A_{33}^{(2)} = A_{33}$ , avec la condition de compatibilité, analogue à (66) :

$$x_3^{(1)} = x_3^{(2)}$$

12. Les méthodes FETI sont développées par François-Xavier Roux à l'ONERA.

13. On prend les notations classiques en Éléments Finis, à savoir ( $T_k$ ) pour les éléments de la triangulation, ( $M_i$ ) pour les sommets du maillage, ( $\varphi_i$ ) pour les fonctions de base  $\mathbb{P}_1$ .

et la condition d'équilibre, analogue à (67) :

$$A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}^{(1)}x_3^{(1)} + A_{33}^{(2)}x_3^{(2)} = f_3 \quad (70)$$

Ainsi, connaissant  $x_3 = x_3^{(1)} = x_3^{(2)}$ , on peut déterminer les inconnues internes à chaque sous-domaine à l'aide des équations locales (69) **internes**,  $i \in \{1, 2\}$  :

$$x_i = A_{ii}^{-1}f_i - A_{ii}^{-1}A_{i3}x_3^{(i)}$$

On a, en éliminant  $x_1$  et  $x_2$  dans (70), on obtient :

$$\underbrace{(A_{33} - A_{31}A_{11}^{-1}A_{13} - A_{32}A_{22}^{-1}A_{23})}_S x_3 = f_3 - A_{31}A_{11}^{-1}f_1 - A_{32}A_{22}^{-1}f_2 := c_3$$

La matrice  $S$  est appelée matrice du complément de Schur du système (68). A noter que l'on peut également faire intervenir des matrices des compléments de Schur locales des systèmes (69) en éliminant  $x_i$  dans la seconde équation de (69) :

$$\underbrace{(A_{33}^{(i)} - A_{3i}A_{ii}^{-1}A_{i3})}_{S^{(i)}} x_3^{(i)} = f_3^{(i)} - A_{3i}A_{ii}^{-1}f_i := c_3^{(i)}$$

On a alors :  $S = S^{(1)} + S^{(2)}$  et  $c_3 = c_3^{(1)} + c_3^{(2)}$ . Le complément de Schur conserve les propriétés de la matrice globale (symétrie, définie-positivité, ...) avec l'avantage d'être de plus petites dimensions et de vérifier l'inégalité :

$$\text{Cond}(S) \leq \text{Cond}(A)$$

On ne peut généralement obtenir de meilleure estimation, à l'exception des problèmes d'EDP elliptiques, où il est prouvé que le conditionnement est bien meilleur.

Pour résoudre les problèmes couplés (64)-(65), on construit un schéma itératif en ajoutant une condition aux limites sur l'interface pour chaque sous-problème, laquelle est définie en s'inspirant des conditions de transmission. Dans la méthode FETI-2LM, on impose une condition de Fourier à l'interface. On s'intéresse donc aux problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & [\Omega_1] \\ u = \bar{w} & [\gamma_1] \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} + k_1 u = \lambda_1 & [\Gamma] \end{array} \right. \quad (71)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = f & [\Omega_2] \\ v = \bar{w} & [\gamma_2] \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_2} + k_2 v = \lambda_2 & [\Gamma] \end{array} \right. \quad (72)$$

On obtient après discrétisation de (71) et (72) :

$$\begin{pmatrix} A_{ii} & A_{i3} \\ A_{3i} & A_{33}^{(i)} + k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ f_3^{(i)} + \lambda_i \end{pmatrix} \quad (73)$$

Par ailleurs, les conditions de transmission (66) et (67) se récrivent :

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 - (k_1 + k_2)u &= 0 & [\Gamma] \\ \lambda_1 + \lambda_2 - (k_1 + k_2)v &= 0 & [\Gamma] \end{aligned}$$

soit, au niveau discret, dans chacun des sous-domaines :

$$\lambda_1 + \lambda_2 - (k_1 + k_2)x_3^{(i)} = 0 \quad (74)$$

On a d'autre part en éliminant les inconnues internes dans la dernière équation de (73) :

$$\left(k_i + S^{(i)}\right) x_3^{(i)} = \lambda_i + c_3^{(i)} \quad (75)$$

Ainsi, en insérant (75) dans l'équation (74), on a :

$$\lambda_1 + \lambda_2 - (k_1 + k_2) \left(k_i + S^{(i)}\right)^{-1} (\lambda_i + c_3^{(i)}) = 0$$

Le système condensé à l'interface s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I} - (k_1 + k_2) (k_1 + S^{(1)})^{-1} & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & \mathcal{I} - (k_1 + k_2) (k_2 + S^{(2)})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2) (k_1 + S^{(1)})^{-1} c_3^{(1)} \\ (k_1 + k_2) (k_2 + S^{(2)})^{-1} c_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

Les conditions de Fourier optimales sont alors :

$$k_1 = S^{(2)} \quad ; \quad k_2 = S^{(1)}$$

de sorte que la matrice interface soit l'identité et :

$$\lambda_1 = c_3^{(2)} \quad ; \quad \lambda_2 = c_3^{(1)}$$

Cependant, on ne peut calculer les opérateurs optimaux ; c'est pour cela que l'on en détermine des approximations creuses.