RENFORT EN ANALYSE ET ANALYSE NUMERIQUE

COURS DE MM. AUDUSSE ET MERLET (ANALYSE NUMÉRIQUE)
COURS DE M. BALABANE (ANALYSE)

- Vendredi 31 janvier 2009 de 12h00 à 13h30
- Vendredi 6 février 2009 de 12h00 à 13h30
- Mercredi 11 février 2009 de 12h00 à 13h30
- Vendredi 13 février 2009 de 12h00 à 13h30
- Vendredi 6 mars 2009 de 12h00 à 17h30
- Vendredi 13 mars 2009 de 12h00 à 13h30
- Vendredi 20 mars 2009 de 12h00 à 13h30
- Vendredi 27 mars 2009 de 12h00 à 13h30
- Vendredi 3 avril 2009 de 12h00 à 13h30
- Vendredi 10 avril 2009 de 12h00 à 13h30
- Vendredi 15 mai 2009 de 12h00 à 13h30
- Vendredi 22 mai 2009 de 12h00 à 13h30

Table des matières

Chapitre 1

Polynômes

L'un des objectifs majeurs de l'analyse numérique est d'approcher des fonctions, qu'elles soient données explicitement ou solutions d'équations différentielles, tout en contrôlant l'erreur commise. Les fonctions les plus "simples" à manipuler numériquement sont les polynômes. En stockant les coefficients d'un polynôme, on dispose non seulement de valeurs en des points déterminés, mais surtout d'un comportement général : un développement limité est la donnée d'un polynôme dont le comportement est le plus proche de la fonction au voisinage d'un point fixé. L'erreur commise est alors de l'ordre du degré du polynôme.

Le but de ce cours est de redonner les définitions utiles et les théorèmes fondamentaux liés à la théorie des polynômes, puis de rappeler quelques applications importantes à l'analyse numérique.

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions

Définition 1 Soit $\mathbb{K}$ un corps. Un **polynôme** P sur $\mathbb{K}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang. On appelle **degré** de P le rang du dernier élément non nul de la suite. Ce terme est appelé **coefficient dominant**.

On note X le polynôme $(0,1,0,0,\ldots)$. Si $P=(p_0,p_1,\ldots,p_n,0,0,\ldots)$, on introduit la notation équivalente :

$$P=\sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k .$$

On note alors $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$. X est appelée l'**indéterminée**. On munit $\mathbb{K}[X]$ de l'addition suivante :

$$P+Q=\sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k + \sum_{k=0}^{+\infty} q_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (p_k+q_k) X^k ,$$

et de la multiplication :

$$P\times Q=\left(\sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k\right)\times\left(\sum_{k=0}^{+\infty} q_k X^k\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}\right) X^k .$$

Le degré de $P+Q$ est au plus $\max\big(deg(P), deg(Q)\big)$. Celui de $P\times Q$ est $deg(P)\times deg(Q)$.

Définition 2 Un polynôme est dit **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1.

Définition 3 On associe à un polynôme $P=\sum_{k=0}^{n} p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ la **fonction polynomiale** $\tilde{P}$ définie par :

$$\tilde{P}:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k x^k \end{array}\right.$$

En toute généralité, il faut veiller à ne pas confonfre polynôme et fonction polynomiale, notamment dans les corps finis. Sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ et sur tout corps infini, on peut identifier P et $\tilde{P}$. On se place dans la suite dans ce dernier cas.

1.1.2 Polynômes dérivés

Définition 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le **polynôme dérivé** de $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ $(p_n \neq 0)$, noté P', par la formule :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k p_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) p_{k+1} X^k .$$

Si $P = p_0$, alors P' est défini par : $P' = 0$.

Si P est un polynôme de degré $n \geqslant 1$, alors P' est un polynôme de degré $n-1$. On définit alors par récurrence les polynômes dérivés d'ordre k par :
- $P^{(0)} = P$;
- $P^{(1)} = P'$;
- pour $k \geqslant 1$, $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$.

Propriété 1 La formule de Taylor pour les polynômes est exacte, au sens où le reste est nul. Plus précisément, si P est un polynôme de degré n, alors on peut écrire, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k .$$

On a de même la formule de Leibniz pour les polynômes : si P et Q sont deux polynômes, on a :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)} .$$

1.1.3 Arithmétique sur l'anneau des polynômes

Propriété 2 Pour tout couple de polynômes (A, B) de $\mathbb{K}[X]$, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) vérifiant :

$$A = BQ + R \qquad \text{avec} \qquad deg(R) < deg(B) .$$

Q est appelé **quotient** et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Si $R = 0$ et $A = BQ$, on dit que B divise A, ou, de manière équivalente, que A est un multiple de B.

Définition 5 On appelle **pgcd** de A et B le plus grand diviseur commun à A et à B, *i.e.* le polynôme unitaire de degré minimal de l'ensemble $\{AU + BV \mid U \in \mathbb{K}[X],\ V \in \mathbb{K}[X]\}$.

En particulier, $pgcd(A, B)$ divise A et B. Réciproquement, si D divise A et B, il divise $pgcd(A, B)$.

Les principaux théorèmes (Gauss, Bezout, ...) de l'arithmétique des entiers s'appliquent aux polynômes.

Définition 6 Deux polynômes sont dits **premiers entre eux** si leur pgcd vaut 1.

Définition 7 Un polynôme P est dit **irréductible** sur $\mathbb{K}$ s'il n'admet comme diviseurs unitaires que 1 et lui-même divisé par son coefficient dominant.

Théorème 1 *Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminants négatifs.*

1.1.4 Racines

Définition 8 On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une **racine** du polynôme P si $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

Propriété 3 $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P si et seulement si P est divisible par $(X - \alpha)$.

Définition 9 On appelle **multiplicité** de la racine $\alpha \in \mathbb{K}$ de P le plus grand entier k tel que $(X-\alpha)^k$ divise P et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne le divise pas.

Propriété 4 $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P de multiplicité k si et seulement si α est racine de tous les polynômes dérivés de P jusqu'à l'ordre $k-1$, *i.e.* $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$.

Une racine est dite **simple** (resp. double) si elle est de multiplicité 1 (resp. 2).

Théorème 2 *Un polynôme de degré n a au plus n racines.*

1.1.5 L'espace $\mathbb{K}_n[X]$

Définition 10 On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n+1$.

En tant qu'espace vectoriel de dimension finie, $\mathbb{K}_n[X]$ admet une base. La formule de Taylor montre que la famille $\left((X-\alpha)^k\right)_{k\leqslant n}$ en est une base. Plus généralement, toute famille de degrés étagés inférieurs à n et de cardinal $n+1$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, *i.e.* si une famille $(P_k)_{k\leqslant n}$ vérifie $deg(P_k) = k$, alors c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1.1.6 Théorème fondamental

Définition 11 Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **scindé** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(m_1, \ldots, m_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

On a en particulier : $\sum_{k=1}^{p} m_k = deg(P)$. m_k est alors la multiplicité de la racine α_k.

Théorème 3 (D'Alembert - Gauss) *Tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.*

On peut reformuler le théorème précédent en affirmant que tout polynôme sur $\mathbb{C}$ admet au moins une racine et donc que tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes. Ce résultat est faux sur $\mathbb{R}$.

1.1.7 Exemple : les polynômes de Sturm

Soient deux suites de réels non nuls (a_n) et (b_n). On définit alors la suite (P_n) par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = a_1 - X,\ \forall\, n \geqslant 2,\ P_n = (a_n - X)P_{n-1} - b_n^2 P_{n-2}.$$

1. Montrer que P_n est un polynôme de terme dominant $(-1)^n X^n$.
2. Montrer que $\lim\limits_{-\infty} P_n = +\infty$.
3. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que si λ est racine de P_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, alors $P_{i-1}(\lambda)P_{i+1}(\lambda) < 0$.
4. Démontrer que les zéros de P_n sont simples, réels et séparés par les zéros de P_{n-1}.

1.2 Applications

1.2.1 Polynômes orthogonaux dans les espaces à poids

a et b désignent deux éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, avec $a < b$.

Définition 12 Soit ω une fonction positive sur l'intervalle (a, b) telle que $x \mapsto x^k \omega(x)$ soit intégrable pour tout $k \in \mathbb{N}$. On pose alors :

$$\mathscr{L}^2_\omega(a,b) = \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \,\Big|\, \int_a^b \omega(x) f^2(x)\, dx \text{ existe} \right\}$$

ω est appelé **poids** de l'espace.

Propriété 5 L'espace $\mathscr{L}^2_\omega(a,b)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(f,g)_\omega = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\, dx$$

et la norme induite.

Définition 13 (P_n) est une suite de **polynômes orthogonaux** si :
- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $deg(P_n) = n$;
- $\forall\, m \neq n$, $(P_n, P_m)_\omega = 0$.

Propriété 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ et $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

Théorème 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n a n zéros distincts dans $]a, b[$.

Théorème 5 **Il existe une suite de polynômes orthogonaux pour le poids ω, unique à une constante multiplicative près.** Cette suite vérifie une relation de récurrence du type :

$$P_n = A_n \Big((X - B_n) P_{n-1} - C_n P_{n-2} \Big),$$

où B_n et C_n sont donnés par :

$$B_n = \frac{(XP_{n-1}, P_{n-1})_\omega}{\|P_{n-1}\|^2_\omega} \qquad \text{et} \qquad C_n = \frac{(XP_{n-1}, P_{n-2})_\omega}{\|P_{n-2}\|^2_\omega}.$$

1.2.2 Résultats de convergences

On rappelle ici deux résultats de convergence de suites de polynômes dans $\mathscr{L}^\infty(a,b)$ et dans $\mathscr{L}^2_\omega(a,b)$.

Théorème 6 (Weierstrass) *Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$, il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f.*

Théorème 7 *Soit $f \in \mathscr{L}^2_\omega(a,b)$. Alors il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :*

$$\|f - Q_n\|_\omega = \inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - P\|_\omega .$$

Le polynôme Q_n est défini par :

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f, P_k)_\omega}{\|P_n\|^2_\omega} P_k$$

où (P_k) est la famille de polynômes orthogonaux de $\mathscr{L}^2_\omega(a,b)$. On a alors :

$$\|f - Q_n\|_\omega \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

1.2.3 Interpolation polynomiale

Le but de l'interpolation polynomiale est d'approcher des fonctions régulières par des polynômes en requierant qu'ils prennent les mêmes valeurs en un certain nombre de points. On formule le problème dit de Lagrange comme suit :

> **Problème** Soient $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ points distincts de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer un polynôme P de *degré minimal* qui prenne les mêmes valeurs que f aux points (a_i).

Justifions tout d'abord l'existence et l'unicité d'un tel polynôme. Pour cela, considérons l'application linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \longmapsto \Big(P(a_0), \dots, P(a_n)\Big) \end{cases}$$

Pour que φ soit un isomorphisme, il faut que les ensembles de départ et d'arrivée soient de même dimension, donc $n+1$. On considère donc la restriction φ_n de φ au sous-espace vectoriel de dimension $n+1$ $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Montrons que φ_n est bijective. Pour cela, montrons que l'application linéaire est injective : si $\varphi_n(P) = 0$, alors $P(a_i) = 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$. Comme tous les a_i sont distincts, on en déduit que P de degré n admet $n+1$ racines distinctes. P est donc le polynôme nul et φ_n est injective, donc bijective car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie.

Ainsi, pour tout vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique antécédent par φ_n. En particulier, pour le vecteur de coordonnées $\big(f(a_i)\big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, il existe un unique polynôme P_n de degré n tel que $\varphi_n(P_n) = \big(f(a_i)\big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, *i.e.* tel que :

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n,\ P_n(a_i) = f(a_i)\,.$$

Déterminons ensuite une expression de ce polynôme. Mettons-le sous la forme :

$$P = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\ell_i\,.$$

où les polynômes ℓ_i sont de degré au plus n et prennent les valeurs 1 en a_i et 0 en a_j, $j \neq i$. ℓ_i s'annule en $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ donc est divisible (et même proportionnel) par $L_i = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - a_j)$. De la condition $\ell_i(a_i) = 1$, on en déduit que :

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n,\ \ell_i = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}\,.$$

Définition 14 Les polynômes ℓ_i sont appelés **polynômes de *Lagrange*** et forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. P_n est appelé **polynôme d'interpolation de *Lagrange*** relatif à la fonction f et aux noeuds (a_i).

Remarque 1 *Numériquement, évaluer les polynômes de Lagrange sous la forme précédente est particulièrement instable et coûteuse. On préfèrera utiliser les polynômes de Newton et les différences divisées.*

Plus la fonction f est régulière, plus l'approximation de f par P_n est d'ordre élevé, comme en témoigne le résultat suivant :

Théorème 8 *Soit f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}(a,b)$. On se donne $n+1$ points (a_i) distincts de $[a,b]$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$, il existe ξ_x dans le plus petit intervalle ouvert contenant tous les points (a_i) tel que :*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - a_i)\,. \tag{1.1}$$

Le résultat précédent est cependant à nuancer dans la mesure où il ne prouve pas la convergence de la suite de polynômes (P_n) vers f. On souhaite en effet diminuer l'erreur en augmentant le nombre de points, ce qui n'est pas nécessairement le cas. L'exemple bien connu et mis en valeur par Runge est la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ pour laquelle une interpolation à noeuds équirépartis dans $[-5,5]$ diverge. De même, Bernstein a montré que le polynôme d'interpolation de $x \mapsto |x|$ divergeait sur $[0,1]$ pour les mêmes noeuds. Les deux facteurs importants dans la formule (1.1) sont d'une part la régularité de la fonction à interpoler, au sens où il faut contrôler $\|f^{(n+1)}\|_\infty$, et d'autre part le choix des noeuds pour contrôler $\left\|\prod_{i=0}^{n}(x-a_i)\right\|_\infty$. Le premier point est difficilement maîtrisable dans la mesure où la fonction est donnée et non choisie. On montre en revanche pour le second point que le choix des noeuds est crucial et permet dans un certain nombre de cas de garantir la convergence. Dans l'exemple de Runge, en prenant pour noeuds les racines des polynômes de Tchebyshev, on a bien convergence du polynôme d'interpolation. Ceci est vrai pour toute fonction régulière f vérifiant $\lim_{\delta\to 0}\omega_f(\delta)\ln\delta = 0$, où ω_f est le module de continuité de f [Bernstein, 1916].

Remarque 2 *On parle d'interpolation d'Hermite lorsque l'on impose non seulement au polynôme d'approximation de prendre les mêmes valeurs que la fonction aux noeuds choisis, mais également d'avoir les mêmes tangentes en ces points (Hermite d'ordre 1).*

On peut encore généraliser en imposant jusqu'à l'ordre k que P admette les mêmes dérivées que la fonction aux noeuds. Le polynôme est alors de degré (au plus) $k(n+1)-1$.

1.2.4 Splines

Une autre branche de l'interpolation s'intéresse à l'approximation de fonctions non pas par un polynôme, mais par une fonction polynomiale par morceaux, appelée spline. Sur chaque sous-intervalle de discrétisation, on approche la fonction par un polynôme. On impose ensuite des conditions de raccord aux noeuds du maillage à l'ordre $0, 1, \ldots$. Plus l'ordre est élevé, plus le degré du polynôme local l'est. L'approximation n'est cependant plus un polynôme en tant que tel (globalement).

Prenons par exemple le cas d'un intervalle $[a,b]$, recouvert par un maillage $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. On note $I_j = [a_{j-1}, a_j]$. Un spline quadratique interpolant f est une fonction S définie sur $[a,b]$ telle que :

- S et S' sont continues ;
- S est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 sur chaque intervalle I_j ;
- $\forall\, j \in \{0,\ldots,n\}$, $S(x_j) = f(x_j)$.

On détermine alors S en utilisant la continuité et la dérivabilité qui fournissent des conditions de raccord. Les coefficients sont donc liés par des formules de récurrence. Il reste deux paramètres libres, ce qui justifie que l'ensemble des splines quadratiques interpolant f est un espace affine de dimension 2.

1.2.5 Intégration numérique

On cherche dans ce paragraphe à approcher l'intégrale d'une fonction régulière sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Plus précisément, on cherche à déterminer les poids de quadrature (λ_j) et les noeuds de quadrature (x_j) tels que la formule :

$$\int_a^b \omega(t) f(t)\,dt \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) + E(f) \tag{1.2}$$

soit d'ordre N, *i.e.* que la forme linéaire E s'annule sur $\mathbb{R}_N[X]$.

Propriété 7 Si les n points $x_1,\ldots,x_n$ sont distincts, il existe un unique choix de poids $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que la formule (1.2) soit d'ordre $n-1$.

Les formules d'interpolation polynomiale fournissent des formules d'intégration numérique : les formules de Gauss résultent de l'interpolation de Hermite alors que les formules de Newton-Cotes proviennent de l'interpolation de Lagrange.

En effet, en se donnant une subdivision régulière de $[a,b]$, *i.e.* :

$$x_j = a + j\frac{b-a}{n},$$

on peut utiliser le polynôme P_n d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0,\dots,x_n$. Par la formule (1.1), en intégrant, on obtient :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\underbrace{\int_a^b \ell_j(t)\,dt}_{\lambda_j} + E(f) \quad \text{avec} \quad E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x)\Pi_{n+1}(x)\,dx.$$

Cette formule, dite de Newton-Cotes fermée, est exacte de manière évidente sur $\mathbb{R}_n[X]$. On parle de formule ouverte lorsque les points extrêmes x_0 et x_{n+1} sont exclus de l'interpolation.

Chapitre 2

Analyse Numérique Matricielle

2.1 Théorie Matricielle

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps, m, n et p des entiers naturels non nuls, E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p, n et m et enfin $\mathcal{U} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{V} = (e'_1, \dots, e'_n)$ et $\mathcal{W}$ des bases respectives des trois espaces vectoriels E, F et G.

2.1.1 Matrice d'une application linéaire

Définition 15 Une **matrice** de type (n, p) sur $\mathbb{K}$ est une application de $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$ dans $\mathbb{K}$ qui à (i, j) associe le scalaire m_{ij}. On représente cette matrice par :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

i est ainsi l'indice de ligne et j l'indice de colonne.

L'ensemble des matrices de type (n, p) sur $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 16 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$. On appelle alors **matrice** de f dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ la matrice de coefficients (a_{ij}), notée $mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La dimension de l'espace de départ est ainsi le nombre de colonnes et la dimension de l'espace d'arrivée le nombre de lignes.

Définition 17 Le **rang** d'une matrice est le rang des vecteurs colonnes de la matrice, soit encore le rang de l'application linéaire associée.

2.1.2 Opérations matricielles

Propriété 8 $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, muni de l'addition $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ et du produit externe $\lambda(a_{ij}) = (\lambda \cdot a_{ij})$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension np et de base canonique la famille (E_{rs}) définie par : $\forall\ (r, s) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$, $E_{rs} = (\delta_{ir}\delta_{js})$. [1]

Propriété 9 On considère deux applications $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, de matrices respectives $mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $mat_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(g) = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors :

$$mat_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(g \circ f) = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}) \text{ où } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

[1] E_{rs} a pour coefficients 1 en position (r, s) et 0 ailleurs.

Définition 18 Le **produit** BA de $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice C définie par :

$$C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}) \text{ où } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

Définition 19 La **transposée** de la matrice $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice ${}^tM = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Propriété 10 Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on a : ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.

Théorème 9 Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x,y) \in E \times F$ définis par :

$$x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k \text{ et } y = \sum_{k=1}^{n} y_k e'_k \text{ de vecteurs associés } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Pour $A = mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$, on a :

$$y = f(x) \Longleftrightarrow Y = AX$$

Notons par ailleurs que pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ de vecteurs colonnes $a_1, \ldots, a_p$ de $\mathbb{K}^n$ et pour $X \in \mathbb{K}^p$, on a :

$$AX = \sum_{i=1}^{p} x_i a_i$$

Ainsi, chercher X tel que $AX = 0$ revient à chercher une combinaison linéaire qui annule les vecteurs colonnes de A, donc à savoir si la famille $(a_1, \ldots, a_p)$ est libre ou non.

2.1.3 Matrices carrées

Dans tout le paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, de base $\mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 20 Une matrice **carrée** d'ordre n est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. La matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{U}$ est la matrice $mat_{\mathcal{U}}(f) = mat_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f)$.

Propriété 11 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni du produit matriciel est une $\mathbb{K}$-algèbre, dont l'élément unité pour le produit est :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = mat_{\mathcal{U}}(\mathrm{Id}_E)$$

Définition 21 On appelle **trace** de la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire : $Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ii}$.

Théorème 10 Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $Tr(AB) = Tr(BA)$.

2.1.4 Déterminant

On se place sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On considère la famille $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E. On note $A = (a_{ij})$ la matrice de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{B}$, i.e. $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\},\ v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.

Définition 22 On appelle **déterminant** dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $\mathcal{V}$ (également déterminant de la matrice A) la quantité :

$$\det_{\mathcal{B}}(A) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}.$$

où $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ.

Propriété 12 Pour tout famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E et toute famille $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ de scalaires de $\mathbb{K}$, on a :

$$\det_{\mathscr{B}}\left(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k v_k\right) = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n).$$

Propriété 13 $\mathscr{V}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{V}) \neq 0$.

Théorème 11 Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, $\det_{\mathscr{B}}\big(f(\mathscr{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ de E. On note alors $\det(f)$, nommé **déterminant** de f.

2.1.5 Propriétés du déterminant

Définition 23 $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** si $\det(M) \neq 0$. On note M^{-1} **l'inverse** de M, i.e. la matrice telle que : $MM^{-1} = M^{-1}M = I_n$.

Propriété 14 Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son rang est n, i.e. si ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$. M est donc inversible si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$, i.e. ssi :

$$\forall\, X \in \mathbb{K}^n,\ MX = 0 \Longrightarrow X = 0.$$

On en déduit que M est inversible si et seulement si l'application linéaire de matrice M dans une base est bijective.

Propriété 15 Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

1. $\det({}^tA) = \det(A)$.
2. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
3. Si, de plus, A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

2.1.6 Comatrice et développement du déterminant

Dans tout le paragraphe, on considère $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et on note $(c_1, \ldots, c_n)$ les vecteurs colonnes de M.

Définition 24 On définit les **cofacteurs** de la matrice M par :

$$\gamma_{ij}(M) = \det_{\mathscr{B}}(c_1, \ldots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \ldots, c_n)$$

On définit alors la **comatrice** de M de coefficients (γ_{ij}), notée $com\, M$ et la **matrice complémentaire** de M, notée $\widetilde{M} = {}^t(com\, M)$.

Définition 25 On appelle **développement de** $\det M$ **suivant la** j**-ième colonne** l'expression :

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\gamma_{ij}$$

Définition 26 On appelle **mineur** (i, j) de la matrice M le déterminant de la matrice extraite de M par suppression de la ligne i et de la colonne j. On le note Δ_{ij}.

Propriété 16 On a : $\gamma_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$. D'où :

$$\det M = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij}\Delta_{ij}$$

Théorème 12 Pour toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $M\widetilde{M} = (\det M) I_n$. En particulier, si M est inversible :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\widetilde{M}$$

2.2 Matrices particulières

On se place sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2.2.1 Eléments

Soit une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 27 P est dite :
- **symétrique** si ${}^tP = P$, **hermitienne** si ${}^t\overline{P} = P$.
- **antisymétrique** si ${}^tP = -P$, **antihermitienne** si ${}^t\overline{P} = -P$.

Définition 28 P est dite :
- **orthogonale** si ${}^tPP = P\,{}^tP = I_n$, **unitaire** si ${}^t\overline{P}P = P\,{}^t\overline{P} = I_n$.
- **normale** si ${}^t\overline{P}P = P\,{}^t\overline{P}$.

Définition 29 P est dite :
- **diagonale** si : $\forall\ i \neq j,\ p_{ij} = 0$.
- **scalaire** s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que : $P = \alpha I_n$.
- **triangulaire supérieure** si : $\forall\ i < j,\ p_{ij} = 0$.
- **triangulaire inférieure** si : $\forall\ i > j,\ p_{ij} = 0$.

Propriété 17 Matrices diagonales et triangulaires :
- Soit A une matrice diagonale à coefficients $a_1, \ldots, a_n$.
  - $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_i$.
  - A est inversible si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\},\ a_i \neq 0$. Son inverse est alors une matrice diagonale, à coefficients diagonaux $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$.
- Soit A une matrice triangulaire à coefficients (a_{ij}).
  - $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
  - Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Son inverse est alors triangulaire supérieure (resp. inférieure).
  - Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

2.2.2 Ensembles

On désigne alors par :

$\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe (linéaire) des éléments inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathscr{SL}_n(\mathbb{K})$ le sous-groupe des éléments inversibles de déterminant 1.

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ la sous-algèbre des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$) la sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).

$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{H}_n(\mathbb{C})$) le groupe des matrices symétriques (resp. hermitiennes).

$\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{C})$) le groupe des matrices antisymétriques (resp. antihermitiennes).

$\mathscr{O}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$) le groupe des matrices orthogonales (resp. unitaires).

2.3 Normes matricielles

Définition 30 Pour toute norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{C}^n$, on appelle **norme subordonnée** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'application :

$$A \longmapsto \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propriété 18 Soit $\| \ \|$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note de même $\| \ \|$ la norme associée sur $\mathbb{C}^n$. Alors :

1. $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall\ X \in \mathbb{C}^n,\ \|AX\| \leqslant \|A\| \cdot \|X\|$.
2. $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists\ X_0 \in \mathbb{C}^n,\ \|AX_0\| = \|A\| \cdot \|X_0\|$.
3. $\|I_n\| = 1$

Théorème 13 Les normes subordonnées à $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont :

$$\|A\|_1 = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \ ; \ \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)} \ ; \ \|A\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Pour la définition de la matrice adjointe $A^* = {}^t\bar{A}$, *cf.* le théorème 31. Pour la définition du rayon spectral ρ, *cf.* la définition 32.

Propriété 19 La norme euclidienne est invariante par transformation unitaire :

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall\ Q \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}),\ \|QA\|_2 = \|A\|_2 = \|AQ^*\|_2$$

Exercice 1 On définit une autre norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non subordonnée : la norme de *Schur*.

$$\|A\|_s = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)} = \sqrt{Tr(A^* A)}$$

Théorème 14

1. Pour toute norme $\| \ \|$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\|A\| \geqslant \rho(A)$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une norme *subordonnée* telle que : $\|A\| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.

2.4 Factorisations

2.4.1 LU

Théorème 15 Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que tous ses mineurs principaux soient non nuls. Alors A se décompose de manière unique sous la forme : $A = LU$, où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U est triangulaire supérieure.

En décomposant U sous la forme DV, où D est la matrice diagonale (u_{ii}) et V traingulaire supérieure à diagonale unité, on obtient une factorisation : $A = LU = LDV$.
Si A est symétrique, on a : ${}^tV = L$, puis : $A = {}^tVDV$.

Théorème 16 Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une permutation σ, ainsi que L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure telles que : $P_\sigma A = LU$.

2.4.2 Cholesky

Théorème 17 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive [2]. Alors il existe $S \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tSS$.

[2] *cf.* **Définition** 3.3.2.

2.4.3 QR

Théorème 18 Toute matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se met sous la forme $A = QR$, où $Q \in \mathscr{O}_m(\mathbb{R})$ et $R = \left(\frac{\bar{R}}{0}\right)$, avec $\bar{R}$ de la forme :

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} * & & \cdots & & * \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & * & \cdots & * \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R}) \quad \text{où } r \text{ est le rang de } A$$

2.5 Cas particuliers

2.5.1 $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$

Généralités

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on a $\det(A) = ad - bc$, $Tr(A) = a + d$, puis $A^2 = Tr(A) \cdot A - \det(A) \cdot I_2$.

Si $ad - bc \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ensembles particuliers

Propriété 20 Le groupe $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$ des rotations du plan complexe est constitué des matrices de la forme, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Théorème 19 L'espace pur $\mathbb{H}$ des quaternions est le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ constitué des matrices de la forme, pour $(y, z) \in \mathbb{C}^2$:

$$q(y, z) = \begin{pmatrix} y & -\bar{z} \\ z & \bar{y} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{H}$ est un **corps gauche**, c'est-à-dire un anneau non commutatif dont tous les éléments non nuls sont inversibles. Une base de $\mathbb{H}$ est la famille (e, I, J, K), avec :

$$e = I_2 \ ; \ I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \ ; \ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$q(a + ib, c + id) = ae + bI + cJ + dK$$

2.5.2 $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$

Généralités

Pour $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, on a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 b_3 c_2 - b_1 c_3 a_2 - c_1 a_3 b_2$$

Ensembles particuliers

Propriété 21 Le groupe $\mathscr{SO}_3(\mathbb{R})$ des rotations de l'espace est constitué des matrices de la forme, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Chapitre 3

Réduction des endomorphismes

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps et u un endomorphisme de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3.1 Diagonalisation

3.1.1 Eléments propres

Définition 31 On appelle **équation aux éléments propres** de u l'équation : $u(\vec{V}) = \lambda\vec{V},\ \lambda \in \mathbb{K}\ et\ \vec{V} \neq \vec{0}$. λ est appelé **valeur propre** de u et $\vec{V}$ **vecteur propre** associé à λ.

Théorème 20 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda Id$ n'est pas injectif. Ainsi, pour λ valeur propre de u, on a :

$$\ker(u - \lambda Id) = \left\{\vec{V},\ \text{vecteur propre associé à } \lambda\right\} \cup \{\vec{0}\}$$

$\ker(u - \lambda Id)$ est l'**espace propre** de u associé à λ, noté $E_u(\lambda)$.

Définition 32 Le **rayon spectral** d'un endomorphisme u (ou d'une matrice) est :

$$\rho(u) = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in Sp(u)\}.$$

Théorème 21 Les sous-espaces vectoriels propres associés à des valeurs propres distinctes sont indépendants. Si $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_p$ sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors $\left(\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_p\right)$ est libre.

3.1.2 Dimension finie

On suppose dans ce paragraphe E de dimension finie n et $Sp_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ deux à deux distinctes.

Propriété 22 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note u_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui à X associe AX. Les éléments propres de la matrice A sont ceux de u_A. Ainsi, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. λ est valeur propre de A : $\exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\ AX = \lambda X$.
2. $A - \lambda I_n \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition 33 Si $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{p} E_u(\lambda_j) = E$, on dit que u est **diagonalisable**.

Théorème 22 Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable : $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{p} E_u(\lambda_j) = E$.

2. $\sum_{j=1}^{p} \dim_{\mathbb{K}} E_u(\lambda_j) = \dim E$.
3. Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.
4. Il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle $mat_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale.
5. E est engendré par des vecteurs propres de u.

Théorème 23 $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si u_A l'est.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est diagonalisable.
2. A est semblable à une matrice diagonale, i.e. il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Il existe $u : E \to E$ diagonalisable et $\mathscr{B}$ base de E tels que $mat_{\mathscr{B}}(u) = A$.
4. Tout endomorphisme u repéré par A dans une base quelconque est diagonalisable.

3.2 Polynômes

3.2.1 Polynômes annulateurs et valeurs propres

Propriété 23 On appelle polynôme annulateur de $u \in \mathscr{L}(E)$ tout polynôme P tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Soit u n'admet que 0 comme polynôme annulateur, soit u admet un polynôme minimal M_u, c'est-à-dire tel que P est annulateur de u si et seulement si M_u divise P.

Théorème 24 Soient λ, valeur propre de u et $\vec{V} \neq \vec{0}$ vecteur propre associé à λ.

- $\forall\, P \in \mathbb{K}[X],\ (P(u))\left(\vec{V}\right) = P(\lambda) \cdot \vec{V}$.
- Si P est annulateur de u, toute valeur propre de u est racine de P.

Propriété 24 En supposant que u admet un polynôme minimal M_u, alors λ est valeur propre de u si et seulement si λ est racine de M_u.

Théorème 25 (Décomposition des noyaux) Avec $P_1, \ldots, P_n$ de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux, on a :

$$\ker(P_1 \times \ldots \times P_n)(u) = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker P_i(u)$$

3.2.2 Dimension finie

On suppose dans tout le paragraphe que E est de dimension finie n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans une base.

Théorème 26 Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable.
2. M_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.
3. Il existe un polynôme P annulateur de u scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$.

Définition 34 Le **polynôme caractéristique** de A est $\det(A - XI_n)$ et est noté $\chi_A(X)$.

Propriété 25 λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine de χ_A.

Théorème 27 χ_A est un polynôme de degré n avec :

$$\chi_A(X) = (-1)^n \left[X^n - (Tr\ A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A\right]$$

Définition 35 Le **polynôme caractéristique d'un endomorphisme** u est celui de sa matrice dans n'importe quelle base.

3.2.3 Multiplicités

Dans tout le paragraphe suivant, a est un élément de $A = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ou de $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Définition 36 • On appelle **multiplicité algébrique** de la valeur propre λ de a la multiplicité de λ comme racine de χ_a. Soit :

$$m_\lambda = \max\{n \in \mathbb{N} \mid (X-\lambda)^n \text{ divise } \chi_a\}$$

- La **multiplicité géométrique** de λ est la dimension de $E_u(\lambda)$.

Propriété 26 Pour toute valeur propre λ de u, on a : $1 \leqslant \dim E_u(\lambda) \leqslant m_\lambda$.

Théorème 28 Si le polynôme caractéristique de a est scindé,

$$\chi_a(X) = \prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(a)} (\lambda - X)^{m_\lambda}$$

En particulier, $\det a = \prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(a)} \lambda^{m_\lambda} \ et \ Tr\ a = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(a)} m_\lambda \cdot \lambda^{m_\lambda}$.

Théorème 29 (Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur, donc divisible par le polynôme minimal.

Théorème 30 u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et si, pour toute valeur propre λ, $\dim E_u(\lambda) = m_\lambda$.

3.3 Adjoint d'un endomorphisme

3.3.1 Définitions

Dans tout le paragraphe, $(E, \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Théorème 31 Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Il existe un unique endomorphisme sur E, noté u^* et appelé **adjoint** de u, tel que :

$$\forall\ (x,y) \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

On a alors, dans toute base orthonormale $\mathscr{B}$ de E, $mat_{\mathscr{B}}(u^*) = {}^t\overline{mat_{\mathscr{B}}(u)}$.

Théorème 32

1. $\forall\ u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $Sp_{\mathbb{K}}(u^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)\}$.
2. $\forall\ u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(u^* - \overline{\lambda} Id) = [Im(u - \lambda Id)]^\perp$.

Définition 37 $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est **autoadjoint** si $u^* = u$.
$u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est **orthogonal** si $u^* \circ u = u \circ u^* = Id$.
$u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est **normal** si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Théorème 33 u est autoadjoint si et seulement si $\forall\ (x,y) \in E^2$, $\langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle$.
De plus, la matrice de u dans une base orthonormale est hermitienne.

Théorème 34 Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. u est orthogonal.
2. u conserve le produit scalaire : $\forall\ (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. u est une isométrie : $\forall\ x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
4. La matrice de u dans une base orthonormale est orthogonale ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou unitaire ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Propriété 27 Dans $\mathbb{C}$, u est normal si et seulement si u est diagonalisable en base orthonormale.

3.3.2 Endomorphismes autoadjoints et théorème spectral

Dans tout le paragraphe, $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ est un espace préhilbertien de dimension finie.

Théorème 35 (Spectral) Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. Le polynôme caractéristique de u est à coefficients réels et est scindé sur $\mathbb{R}$. u est ainsi diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. E est donc somme directe orthogonale des sous-espaces propres.

Définition 38 Un endomorphisme de $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est dit autoadjoint **positif** (resp. défini positif) si $u^* = u$ et si :

$$\forall\, x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geqslant 0 \ \ (\text{resp. } \forall\, x \in E\backslash\{0\},\ \langle u(x), x\rangle > 0)$$

Définition 39 Une matrice symétrique réelle ou hermitienne complexe est dite **positive** (resp. définie positive) si elle repère un endomorphisme positif (resp. défini positif) dans une base orthonormale.

Théorème 36

1. u, autoadjoint, est positif si et seulement si $Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset [0, +\infty[$.
2. u, autoadjoint, est défini positif si et seulement si $Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset]0, +\infty[$, si seulement si u est positif et inversible.
3. Soit A une matrice symétrique ou hermitienne. Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) A est positive.
   (b) $Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset [0, +\infty[$.
   (c) $\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ {}^t\overline{X}AX \in \mathbb{R}_+$.
4. Soit A une matrice symétrique ou hermitienne. Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) A est définie positive.
   (b) $Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset]0, +\infty[$.
   (c) $\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\backslash\{0\},\ {}^t\overline{X}AX \in \mathbb{R}_+^*$.
   (d) A est positive et inversible.

Chapitre 4

Métrique et espaces de Hilbert

4.1 Espaces métriques

A est un ensemble non vide.

4.1.1 Définition préliminaire

Définition 40 On appelle **distance** sur A toute application $d : A^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. (symétrie) $\forall\ (x,y) \in A^2,\ d(x,y) = d(y,x)$;
2. (positivité) $\forall\ (x,y) \in A^2,\ d(x,y) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = y$;
3. (inégalité triangulaire) $\forall\ (x,y,z) \in A^3,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

(A,d) est alors appelé **espace métrique**.

Définition 41 Une suite (x_n) d'éléments de E converge vers $x \in E$ si :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geqslant N,\ d(x,x_n) < \varepsilon.$$

4.1.2 Caractérisation à l'aide de boules

Dans toute la suite, (A,d) est un espace métrique.

Définition 42 Pour $a \in A$ et $r > 0$, on note respectivement :

- $\mathscr{B}_o(a,r) = \{x \in A \mid d(a,x) < r\}$ la **boule ouverte** de centre a et de rayon r ;
- $\mathscr{B}_f(a,r) = \{x \in A \mid d(a,x) \leqslant r\}$ la **boule fermée** de centre a et de rayon r ;
- $\mathscr{S}(a,r) = \{x \in A \mid d(a,x) = r\}$ la **sphère** de centre a et de rayon r.

Définition 43 Une partie V de (A,d) est un **voisinage** de $a \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que $\mathscr{B}_o(a,r) \subset V$.

Définition 44 Une partie O de A est un **ouvert** de A si elle est voisinage de tous ses points, c'est-à-dire, si :

$$\forall\ a \in O,\ \exists\ r > 0,\ \mathscr{B}_o(a,r) \subset O.$$

Une partie est **fermée** si son complémentaire est un ouvert.

Définition 45 L'**intérieur** de $M \subset A$, noté $\overset{\circ}{M}$, est la réunion de tous les ouverts de A inclus dans M. L'**adhérence** de M, noté $\overline{M}$, est l'intersection de tous les fermés de A contenant M.

Définition 46 Une partie M de A est dite **dense** dans A si $\overline{D} = A$.

4.1.3 Caractérisations

Propriété 28 En dimension finie, tous les espaces vectoriels sont fermés.

Définition 47 Soit $M \subset A$. On définit la distance $a \in A$ à M par :

$$d(a, M) = \inf_{x \in M} d(a, x).$$

Propriété 29 $\overset{\circ}{M}$ est le plus grand ouvert de A inclus dans M. $\overline{M}$ est le plus petit fermé de A contenant M. On a ainsi : $\overset{\circ}{M} \subset M \subset \overline{M}$.

Propriété 30 Soit $M \subset A$.

1. $a \in \overline{M}$ si et seulement s'il existe une suite de M qui tend vers a.
2. $\overline{M}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites de M.
3. $x \in \overset{\circ}{M}$ si et seulement si M est voisinage de x.
4. $x \in \overline{M}$ si et seulement si $d(x, M) = 0$.
5. M est fermé si et seulement si $\overline{M} = M$.
6. M est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{M} = M$.

Théorème 37 Soit $M \subset A$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. M est dense dans A.
2. $\forall\, x \in A,\ d(x, M) = 0$.
3. Tout ouvert non vide de A coupe M.
4. Tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de M.

4.1.4 Applications dans un espace métrique

On considère une application $f : (A, d_A) \longrightarrow (B, d_B)$ avec (A, d_A) et (B, d_B) espaces métriques.

Définition 48 f est dite **k-lipschitzienne** s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall\, (x, y) \in A^2,\ d_B\big(f(y), f(x)\big) \leqslant k \cdot d_A(x, y).$$

On parle d'application **contractante** lorsque $k < 1$.

Remarque 3 Pour $X \subset A$, l'application $A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \longmapsto d(a, X)$ est définie et 1-lipschitzienne, $\mathbb{R}$ étant muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$.

Définition 49 f est **continue** en $x_0 \in A$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *i.e.* :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in A,\ d_A(x, x_0) < \alpha \Longrightarrow d_B\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Théorème 38 f est continue en $x_0 \in A$ si et seulement si, pour toute suite (u_n) de A qui converge vers x_0, $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$.

Propriété 31 f est continue en x_0 si et seulement si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x_0)$ dans B est un voisinage de x_0 dans A.
f est continue sur A si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de B est un ouvert de A.

Définition 50 f est **uniformément continue** sur A si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, (x, y) \in A^2,\ d_A(x, y) < \alpha \Longrightarrow d_B\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Propriété 32 Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, donc continue.

4.2 Complétude

4.2.1 Suites de Cauchy

Définition 51 Une **suite** de (A,d), espace métrique, est dite **de Cauchy** si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant p \geqslant N,\ d(u_n, u_p) < \varepsilon.$$

Définition 52 $\alpha \in A$ est **valeur d'adhérence** de la suite (u_n) de A si tout voisinage de α contient une infinité de termes de la suite :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geqslant N,\ d(u_n, \alpha) < \varepsilon.$$

De manière équivalente, il existe $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\phi(n)}$ converge vers α.

Propriété 33
- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge.

Définition 53 Un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit **complet**.

4.2.2 Théorème de point fixe

Soit (A,d) un espace métrique complet non vide.

Théorème 39 (Picard) Soit $f : A \to A$ contractante. Alors f admet un unique point fixe.

Propriété 34 Sous l'hypothèse de complétude de A, toute intersection d'ouverts denses dans A est dense dans A. Toute réunion de fermés de A d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Propriété 35 Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace complet est complet.

4.3 Compacité

Définition 54 Un **espace métrique** est dit **compact** si toute suite admet au moins une valeur d'adhérence. Une **partie** M de (A,d) est **compacte** si $(M, d_{|M^2})$ est un espace compact.

Théorème 40 Un espace métrique (A,d) est compact si et seulement s'il possède la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement de A par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Théorème 41 Une partie M de l'espace métrique (A,d) est compacte si et seulement si toute suite d'éléments de M admet au moins une valeur d'adhérence dans M.

Propriété 36

1. Tout espace métrique compact est complet.
2. Toute partie compacte d'un espace métrique est fermée bornée.
3. En dimension finie, tout ensemble fermé borné d'un espace métrique est compact.
4. Une partie d'un espace compact est compacte si et seulement si elle est bornée.

Théorème 42 (Bornes)

1. L'image continue d'un compact est compacte.
2. Toute fonction continue sur un compact non vide et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 43 (Heine) Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

4.4 Espaces vectoriels normés

Dans tout le paragraphe, E désigne un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

Définition 55 On appelle **norme** sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. (positivité) $\forall\, x \in E,\ N(x) \geqslant 0$;
2. (homogénéité) $\forall\, (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
3. (inégalité triangulaire) $\forall\, (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$;
4. $(N(x) = 0) \Longrightarrow (x = 0)$.

Remarque 4 Une **semi-norme** est une application ne vérifiant que les points 1., 2. et 3.

Définition 56 Soit $(A, +, \times, \cdot)$ un anneau de neutre e_A. Une **norme d'algèbre** sur A est une application $N : A \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

1. N est une norme sur $(A, +, \cdot)$;
2. $\forall\, (x, y) \in A^2,\ N(x \times y) \leqslant N(x) \cdot N(y)$;
3. $N(e_A) = 1$.

Définition 57 Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites **équivalentes** s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :

$$\forall\, x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$$

Propriété 37 Si N est une norme sur E, alors l'application $d : (x, y) \longmapsto N(x - y)$ définit une distance sur E.

Définition 58 On qualifie d'**espace vectoriel normé** (resp. d'**algèbre normée**) tout espace vectoriel (resp. algèbre) muni(e) d'une norme (resp. d'algèbre).

Théorème 44 Sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Propriété 38 (Inégalités)

1. (parallélogramme) $\forall\, (x, y) \in E^2,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.
2. (médiane) $\forall\, (x, y) \in E^2,\ \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\left\|\dfrac{x + y}{2}\right\|^2 + \dfrac{1}{2}\|x - y\|^2$.

Propriété 39 Une norme est une application continue sur E^2.

Définition 59 Un espace vectoriel normé complet est dit **espace de Banach**.

Propriété 40 Tout espace vectoriel de dimension finie est de Banach.

4.5 Espaces de Hilbert

4.5.1 Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 60 Une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est un **produit scalaire** si :

1. $\forall\, (x, y, z) \in E^3,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi(x + \lambda y, z) = \varphi(x, z) + \lambda \varphi(y, z)$; [1]
2. $\forall\, (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ [2] $\boxed{ou}$ $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$; [3] [4]

[1] Linéarité à gauche.
[2] φ est symétrique.
[3] φ est hermitienne.
[4] Les notes 2. et 4. donnent l'antilinéairité de φ.

3. $\forall\, x \in E,\ x \neq 0 \Longrightarrow \varphi(x,x) > 0.$ [5]

Propriété 41 Si φ est un produit scalaire sur E, alors l'application $x \in E \longmapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme sur E, appelée **norme quadratique** associée à φ.

Théorème 45 (Cauchy-Schwarz) Soit φ produit scalaire sur E. Alors :

$$\forall\, (x,y) \in E^2,\ |\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}.$$

avec égalité si et seulement si le couple (x,y) est lié.

Propriété 42 (Formules de polarisation) Pour E $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a :

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle x,y \rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle x,y \rangle = \dfrac{1}{8}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$.
3. $\forall\, (u,v) \in E^2,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \|u+\lambda v\|^2 = \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,Re\big(\lambda \cdot \langle u,v \rangle\big)$.

4.5.2 Espaces préhilbertiens

Définition 61 L'espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est appelé **espace préhilbertien**. On associe à cet espace l'espace vectoriel normé $\left(E, \|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot,\cdot \rangle}\right)$.

Définition 62 Un espace préhilbertien :

- réel de dimension finie est dit **euclidien**.
- complexe de dimension finie est dit **hermitien**.
- complet pour $\|\cdot\|$ est dit **de Hilbert**.

Propriété 43 Dans un espace préhilbertien, le produit scalaire est continu.

4.5.3 Orthogonalité

Définition 63 Deux vecteurs x et y de l'espace préhilbertien E sont dits **orthogonaux** si $\langle x,y \rangle = 0$.
Une famille est dite **orthogonale** si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux, **orthonormée** si de plus tous les vecteurs sont de norme 1.

Théorème 46 (Pythagore) Si u et v de E sont orthogonaux, alors $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Définition 64 Soit A une partie de l'espace préhilbertien E. On définit l'**orthogonal** de A par :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall\, a \in A,\ \langle x,a \rangle = 0\}.$$

Propriété 44 Si A est une partie de l'espace préhilbertien E, alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé.

Propriété 45 Soit $A \subset E$. Alors :

1. $A^\perp = Vect(A)^\perp = \overline{Vect(A)}^\perp$.
2. Si $B \subset A$, alors $A^\perp \subset B^\perp$.
3. $(A^\perp)^\perp = \overline{A}$.

4.5.4 Gram-Schmidt

Théorème 47 (Gram-Schmidt) Soit $(V_1,\dots,V_n)$ une famille libre de $\mathbb{R}^m$. Alors il existe une unique famille orthonormale $(f_1,\dots,f_n)$ de $\mathbb{R}^m$ telle que :

- $\forall\, k \in \{1,\dots,n\},\ Vect(V_1,\dots,V_k) = Vect(f_1,\dots,f_k)$;
- $\forall\, k \in \{1,\dots,n\},\ \langle V_k, f_k \rangle > 0$.

[5] φ est définie positive.

4.5.5 Théorème de Riesz

Dans tout le paragraphe, H est un espace de Hilbert.

Théorème 48 Soit C un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors :

$$\forall\, x \in H,\ \exists!\, c_x \in C,\ \|x - c_x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\|.$$

De plus, $x - c_x \in C^{\perp}$.

Propriété 46 $x \longmapsto c_x$ est la projection orthogonale sur C.

Propriété 47 Soit C un sous-espace vectoriel fermé. Alors $H = C \oplus C^{\perp}$.

Théorème 49 (Riesz)

1. $\forall\, \ell \in H',\ \exists!\, a_\ell \in H,\ \forall\, x \in H,\ \ell(x) = \langle x, a_\ell \rangle$.
2. $\varphi : \ell \in H', \longmapsto a_\ell \in H$ est une isométrie et un anti-isomorphisme.

4.5.6 Bases hilbertiennes

Théorème 50 (Bessel) Soit (e_n) une base orthonormée. Pour $x \in H$, on pose $\xi_n = \langle x, e_n \rangle$.

1. La série de terme général $|\xi_n|^2$ converge, avec :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

2. La série de terme général $\xi_n e_n$ converge et sa somme est la projection de x sur le sous-espace vectoriel engendré par les (e_n).

Définition 65 Une famille (e_n) d'un espace de Hilbert H est dite **totale** si $\overline{Vect\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}} = H$, *i.e.* si l'espace engendré par la famille (e_n) est dense dans H.

Définition 66 Une famille (e_n) d'un espace de Hilbert H est une **base hilbertienne** si elle est orthonormée et totale.

Théorème 51 (Parseval) Soit (e_n) une base hilbertienne de H. Alors :

$$\forall\, x \in H,\ \sum_n \langle x, e_n \rangle\, e_n = x \qquad et \qquad \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Théorème 52 (Fourier) La famille $\left(\dfrac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne des fonctions $\mathscr{L}^2$ du cercle trigonométrique.

Définition 67 Un espace est dit **séparable** s'il admet une famille dénombrable dense.

Propriété 48 V est séparable si et seulement si V admet une base hilbertienne.

4.6 Applications linéaires continues

Dans tout le paragraphe, E et F sont des espaces vectoriels normés.

Théorème 53 Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. φ est lipschitzienne.
2. φ est continue sur E.
3. φ est continue en 0_E.
4. φ est bornée sur la boule unité.
5. $\exists\, k>0,\ \forall\, x \in E,\ \|\varphi(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$.

Définition 68 On pose :

- $\mathscr{L}_c(E,F) = \{f \in \mathscr{L}(E,F) \text{ continue}\}$.
- $\mathscr{L}_c(E) = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ continue}\}$.
- $E' = \mathscr{L}_c(E,\mathbb{K})$, appelé **dual topologique** de E.

Théorème 54 $\mathscr{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

Propriété 49 En dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.

Théorème 55 Avec les notations précédentes, on a :

1. Pour $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$, $\left\{ \|f(x)\|_F \mid \|x\|_E \leqslant 1\right\}$ est majoré non vide. On pose :
$$|\!|\!| f |\!|\!| = \sup\left\{ \|f(x)\|_F \mid \|x\|_E \leqslant 1\right\}.$$
2. $|\!|\!| f |\!|\!| = \min\left\{k \geqslant 0 \mid \forall\, x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant k\|x\|\right\}$.
3. $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$ et une norme d'algèbre sur $\mathscr{L}_c(E)$.

Théorème 56 (Von Neumann) Soit E un espace de Banach.

1. Soit $C \in \mathscr{L}(E)$ tel que $|\!|\!|C|\!|\!| < 1$. Alors $Id_E - C$ est inversible, d'inverse continue, avec :
$$(Id_E - C)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} C^n \ ;\ |\!|\!|(Id_E - C)^{-1}|\!|\!| \leqslant \frac{1}{1 - |\!|\!|C|\!|\!|}.$$
2. Soit $A \in \mathscr{L}(E)$. On suppose A inversible d'inverse continue. Si $B \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $|\!|\!|B|\!|\!| < \dfrac{1}{|\!|\!|A^{-1}|\!|\!|}$, alors $A - B$ est inversible, d'inverse continue.

Définition 69 Un **opérateur à noyau intégral** k est une application linéaire continue K_k d'un espace de Banach E sur un espace de Banach F :
$$K_k : f \in E \longmapsto \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy \in F.$$

Définition 70 Un espace vectoriel normé est dit **réflexif** si E'' est isomorphe à E.