

Méthode des caractéristiques : quelques applications théoriques et numériques

Yohan Penel¹

¹Équipe SIMPAF, INRIA Lille - Nord Europe

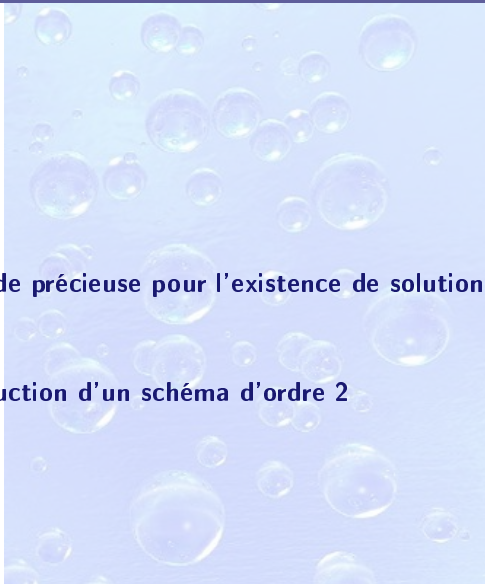
Travaux réalisés en collaboration avec le DM2S/SFME/LETR (CEA Saclay) et le LAGA (Univ. Paris 13)

Séminaire du LRC Manon

1er février 2011

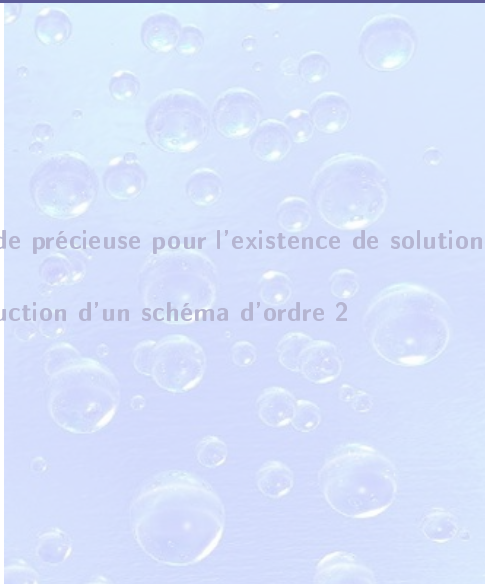
Programme

- 1 Contexte
- 2 MOC : une aide précieuse pour l'existence de solutions
- 3 MOC : construction d'un schéma d'ordre 2



Plan de la partie

- 1 Contexte
- 2 MOC : une aide précieuse pour l'existence de solutions
- 3 MOC : construction d'un schéma d'ordre 2



Introduction

Une problématique

Modéliser l'évolution de bulles
dans un cœur de réacteur nucléaire

Introduction

Une problématique

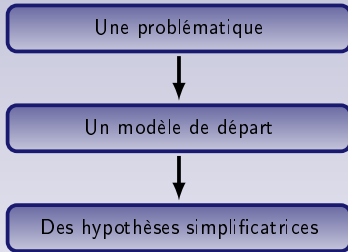


Un modèle de départ

Modéliser l'évolution de bulles
dans un cœur de réacteur nucléaire

Équations de Navier-Stokes
pour un écoulement compres-
sible de 2 fluides non-miscibles

Introduction

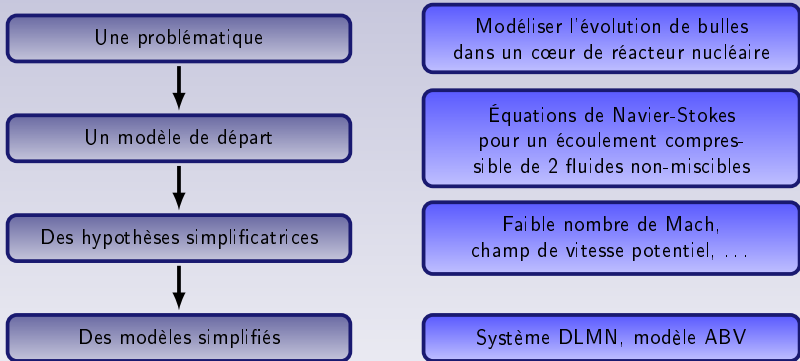


Modéliser l'évolution de bulles dans un cœur de réacteur nucléaire

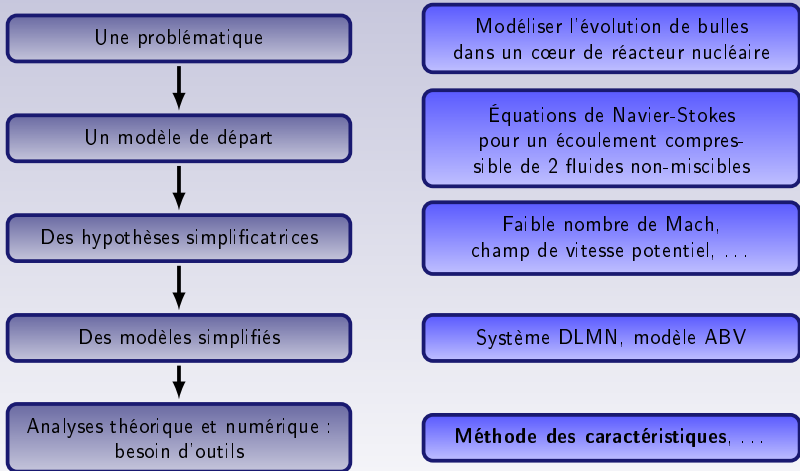
Équations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible de 2 fluides non-miscibles

Faible nombre de Mach, champ de vitesse potentiel, ...

Introduction



Introduction



Dérivation formelle des modèles

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{g} \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{array} \right.$$

Dérivation formelle des modèles

$$\begin{cases} \partial_{\mathbf{t}}(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_{\mathbf{t}}\rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_{\mathbf{t}}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\ \partial_{\mathbf{t}}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

2nd principe de la thermodynamique

$$D_{\mathbf{t}} = \partial_{\mathbf{t}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$$

$$\begin{cases} D_{\mathbf{t}} Y = 0 \\ \partial_{\mathbf{t}}\rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho D_{\mathbf{t}} \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\ \rho c_p D_{\mathbf{t}} T = \alpha T D_{\mathbf{t}} P + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \bar{\sigma} :: \nabla \mathbf{u} \end{cases}$$

Dérivation formelle des modèles

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{array} \right.$$

Grandeurs caractéristiques communes pour les 2 fluides

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0 \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\frac{1}{M^2} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \bar{\sigma} - \frac{\rho}{\text{Fr}} \mathbf{e}_3 \\ \rho c_p D_t T = \beta_* \alpha T D_t P + \frac{\nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} + \frac{M^2}{\text{Re}} \bar{\sigma} :: \nabla \mathbf{u} \end{array} \right.$$

Dérivation formelle des modèles (Sys. DLMN)

$$\begin{cases} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P}$$

Développement
asymptotique
p.r. à $M \ll 1$

Projection de Leray

$$\begin{cases} D_t Y = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta \quad [P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t)] \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \pi + 2 \nabla \cdot [\mu D(\mathbf{u})] + \rho \mathbf{g} \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \end{cases}$$

Dérivation formelle des modèles (Sys. DLMN potentiel)

$$\begin{cases} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

$$\mathbf{u} = \nabla \phi$$

$$D_t = \partial_t + (\nabla \phi \cdot \nabla)$$

$$\begin{cases} D_t Y = 0 \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta \quad [P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t)] \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \end{cases}$$

Dérivation formelle des modèles (Syst. DLMN- β)

$$\begin{cases} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

$$\beta \equiv \beta_0$$

$$\begin{cases} D_t Y = 0 \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta \quad [P'(t) = 0] \\ \rho c_p D_t T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \end{cases}$$

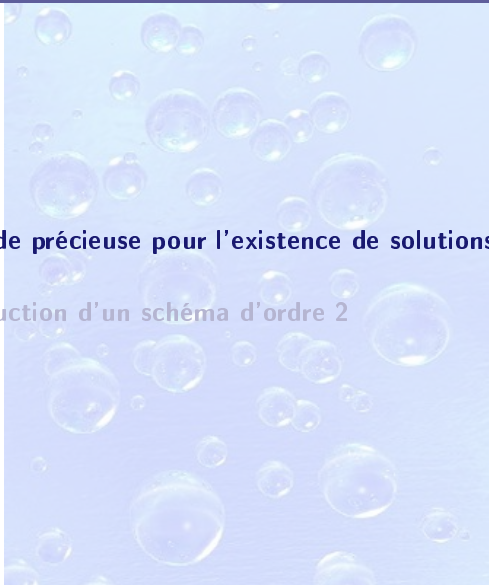
Dérivation formelle des modèles (Modèle ABV)

$$\begin{cases} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

 $\mathcal{G}_\theta \rightarrow \mathcal{G}_Y$

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0 \\ \Delta \phi = \psi(t) \left[Y - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right] \end{cases}$$

Plan de la partie



1 Contexte

2 MOC : une aide précieuse pour l'existence de solutions

3 MOC : construction d'un schéma d'ordre 2

Un premier résultat théorique ...

Théorème (S. Dellacherie & O. Lafitte, '05 ; Y.P., '10)

Soient ψ continue sur \mathbb{R}_+ et $Y_0 \in H^s(\Omega)$, $s \geq s_0 + 1$. Alors il existe $\mathcal{T} > 0$ pour lequel le modèle ABV admet une unique solution classique Y sur $[0, \mathcal{T}]$.

On a noté $s_0 = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1$. La régularité exacte de la solution est :

$$Y \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega) := \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], H^s(\Omega)) \subset \mathcal{C}^1([0, \mathcal{T}] \times \bar{\Omega}).$$

Proposition (Y.P., '10)

La solution existe sur l'intervalle $[0, \mathcal{T}_*]$, avec $\mathcal{T}_* > 0$ donné par :

$$\left\| Y_0 - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y_0(x) dx \right\|_s \cdot C_{abv}(s, d, \Omega) \cdot \int_0^{\mathcal{T}_*} |\psi(t)| dt \leq 1.$$

... puis un second

En notant $\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$, on démontre le résultat suivant :

Théorème (Y.P., '10)

Si Y est une solution faible de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ avec $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(\mathbf{x})]^n \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}, \quad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau.$$

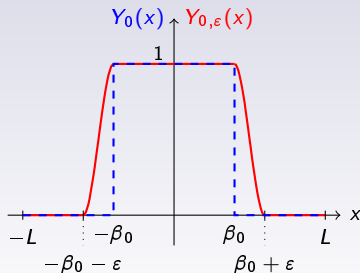
On en déduit un **principe du maximum faible** : si Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ pour presque tout \mathbf{x} , alors il en est de même pour Y .

Objectif : faire mieux ... en 1D

Le modèle s'écrit en dimension 1 (ou tout champ de vecteurs est potentiel) :

$$\begin{cases} \partial_t Y_\varepsilon(t, x) + u_\varepsilon(t, x) \partial_x Y_\varepsilon(t, x) = 0, & Y_\varepsilon(0, x) = Y_{0, \varepsilon}(x), \\ u_\varepsilon(t, x) = \psi(t) \left[\int_{-L}^x Y_\varepsilon(t, x') dx' - (x + L) \mu_\varepsilon(t) \right]. \end{cases}$$

Régularisation :



Objectif : faire mieux ... en 1D

La solution $(Y_\varepsilon, u_\varepsilon)$ existe sur un intervalle $[0, \mathcal{T}_\varepsilon]$. On introduit alors le flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}_\varepsilon}{dt} = u_\varepsilon(t, \mathcal{X}_\varepsilon(t; s, x)), \\ \mathcal{X}_\varepsilon(s; s, x) = x. \end{cases}$$

La fonction $t \mapsto Y_\varepsilon(t, \mathcal{X}_\varepsilon(t; s, x))$ est donc constante, ce qui assure que la solution conserve le même profil que $Y_{0,\varepsilon}$.

En particulier, Y_ε est égale à 1 sur $[-\beta_\varepsilon(t), \beta_\varepsilon(t)]$ et nulle en dehors de $[-\delta_\varepsilon(t), \delta_\varepsilon(t)]$, avec :

$$\beta_\varepsilon(t) = \mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, \beta_0) \quad \text{et} \quad \delta_\varepsilon(t) = \mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, \beta_0 + \varepsilon).$$

En résolvant les EDOs associées aux données initiales β_0 et $\beta_0 + \varepsilon$, on montre que δ_ε et β_ε admettent la même limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Problème : $\mathcal{T}_\varepsilon \rightarrow 0!$

Le sauveur : le jacobien

Équation du jacobien :

$$\frac{d}{dt} |\det \nabla_x \mathcal{X}_\varepsilon(t; s, \mathbf{x})| = \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon(t, \mathcal{X}_\varepsilon(t; s, \mathbf{x})) \times |\det \nabla_x \mathcal{X}_\varepsilon(t; s, \mathbf{x})|.$$

Pour $s = 0$, cette équation s'intègre en :

$$\begin{aligned} |\det \nabla_x \mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, \mathbf{x})| &= \exp \left[\int_0^t \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon(\tau, \mathcal{X}_\varepsilon(\tau; 0, \mathbf{x})) d\tau \right] \\ &= \exp \left[\int_0^t \psi(\tau) \{ Y_\varepsilon(\tau, \mathcal{X}_\varepsilon(\tau; 0, \mathbf{x}) - \mu_\varepsilon(\tau) \} d\tau \right] \\ &= \frac{|\Omega| \exp \left[Y_{0,\varepsilon}(\mathbf{x}) \int_0^t \psi(\tau) d\tau \right]}{\int_\Omega \exp \left[Y_{0,\varepsilon}(\mathbf{y}) \int_0^t \psi(\tau) d\tau \right] d\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Le sauveur : le jacobien

En dimension 1, l'équation s'intègre simplement p.r. à x :

$$\mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, x) = 2L \frac{\int_{-L}^x \exp[\Psi(t)Y_{0,\varepsilon}(y)] dy}{\int_{-L}^L \exp[\Psi(t)Y_{0,\varepsilon}(y)] dy} - L.$$

Le flot est bijectif de $(-L, L)$ dans lui-même et est inversible.

Le raisonnement a été fait sous l'hypothèse que la donnée initiale (et donc le champ de vitesse) était **suffisamment régulière**.

On constate que ce flot **conserve ses propriétés** de bijectivité et son caractère lipschitzien lorsque la donnée initiale est moins régulière, et ce, quel que soit l'intervalle de temps considéré.

Existence d'une solution faible globale

Théorème (Y.P., '10)

Soient $Y_0 \in L^\infty(-L, L)$ et ψ continue. Alors une solution faible globale en temps de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ est donnée par $\mathcal{Y}(t, x) = Y_0(\Theta_t^{-1}(x))$, où Θ_t^{-1} est la réciproque (par rapport à x_0) de la fonction :

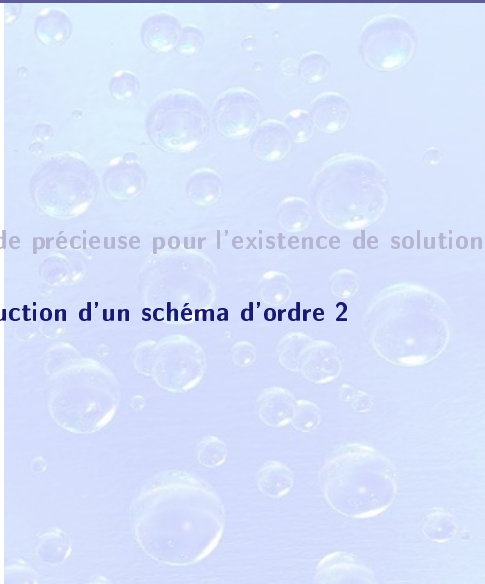
$$\Theta(t, x_0) = 2L \frac{\int_{-L}^{x_0} \exp[\Psi(t) Y_0(y)] dy}{\int_{-L}^L \exp[\Psi(t) Y_0(y)] dy} - L.$$

Idées de base dans la preuve

- Calcul de la quantité : $\mathcal{A}(\mathcal{Y}) := \iint \mathcal{Y}[\partial_t \varphi + \mathcal{U} \partial_x \varphi](t, x) dt dx$
- Changement de variables lipschitzien [Evans et Gariepy, **CRC-Press**, 1992]
- Validité de l'équation caractéristique $\partial_t \Theta = \mathcal{U}(t, \Theta)$

Plan de la partie

- 1 Contexte
- 2 MOC : une aide précieuse pour l'existence de solutions
- 3 MOC : construction d'un schéma d'ordre 2



Problématique

Objectif : conservation au niveau discret des propriétés physiques des modèles.

DLMN-1D

$$\begin{cases} \partial_t Y(t, x) + u(t, x) \partial_x Y(t, x) = 0 \\ u(t, x) = \zeta_0 \kappa(T, Y) \partial_x T(t, x) \\ \partial_t T(t, x) + u(t, x) \partial_x T(t, x) - \frac{1}{[\rho c_p](Y, T)} \partial_x [\kappa(Y, T) \partial_x T(t, x)] = 0 \end{cases}$$

ABV-1D

$$\begin{cases} \partial_t Y(t, x) + u(t, x) \partial_x Y(t, x) = 0, & Y(0, x) = Y_0(x), \\ u(t, x) = \psi(t) \left[\int_{-L}^x Y(t, x') dx' - \frac{x+L}{2L} \int_{-L}^L Y(t, x') dx' \right]. \end{cases}$$

Schéma MOC pour l'advection

Objectifs

- Simuler les **solutions régulières** de l'équation $\partial_t Y + \mathbf{U} \cdot \nabla Y = f$;
- Atteindre **l'ordre 2** en espace-temps.

Idée

La méthode des caractéristiques fournit l'égalité :

$$Y(t, \mathbf{x}) = Y(t - \Delta t, \mathcal{X}(t - \Delta t; t, \mathbf{x})) + \int_{t-\Delta t}^t f(\sigma, \mathcal{X}(\sigma; t, \mathbf{x})) d\sigma,$$

pour \mathcal{X} solution de :

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = \mathbf{U}(t, \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x})), \quad \mathcal{X}(s; s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Schéma MOC pour l'advection

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$

Deux étapes (découplage espace-temps)

- Approximation $\hat{\xi}_i^n$ du **pied de la caractéristique** ξ_i^n : montée à l'ordre 2 par un développement limité de \mathcal{X} autour de (t^n, x_i)
- **Approximation de** $Y(t^n, \hat{\xi}_i^n)$, ne connaissant que les valeurs de la solution aux nœuds du maillage : montée à l'ordre 2 par une interpolation ... d'ordre 2

Choix

Garantir le **principe du maximum** sous l'hypothèse que la solution est régulière.

Schéma MOC pour l'advection

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$

Montée en ordre sur l'approximation de la caractéristique

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i) &= \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \Delta t \cdot \partial_s \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{ss} \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \end{aligned}$$

Utilisation des propriétés du flot :

$$\begin{aligned} \partial_s \mathcal{X}(s; s, \mathbf{x}) &= -\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{X}(s; s, \mathbf{x}) \mathbf{U}(s, \mathbf{x}) = -\mathbf{U}(s, \mathbf{x}), \\ \partial_{ss}^2 \mathcal{X}(s; s, \mathbf{x}) &= (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}(s, \mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{X}(s; s, \mathbf{x}) \mathbf{U}(s, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

D'où :

$$\xi_{i,2}^n = x_i - u_i^n \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} [u_i^n \partial_x u_i^n - \partial_t u_i^n].$$

Schéma MOC pour l'advection

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$

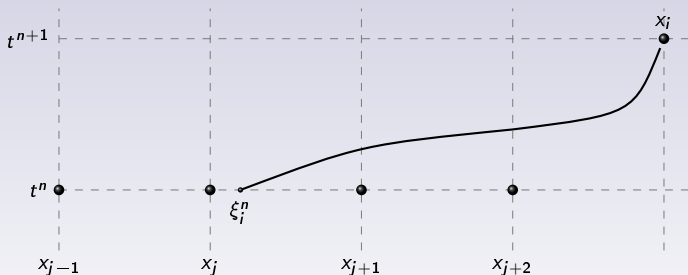


Schéma MOC pour l'advection

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$

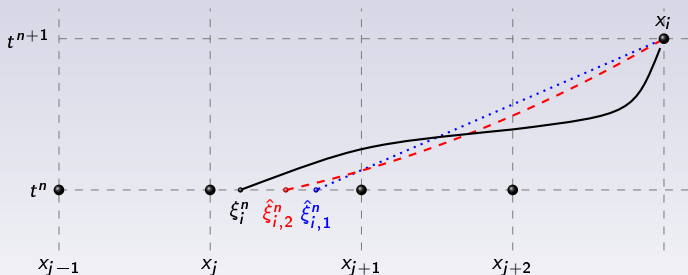


Schéma MOC pour l'advection

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$

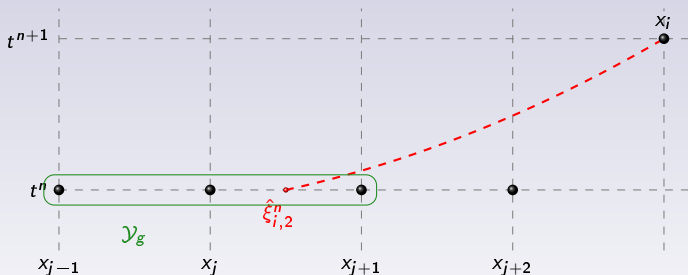


Schéma MOC pour l'advection

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$

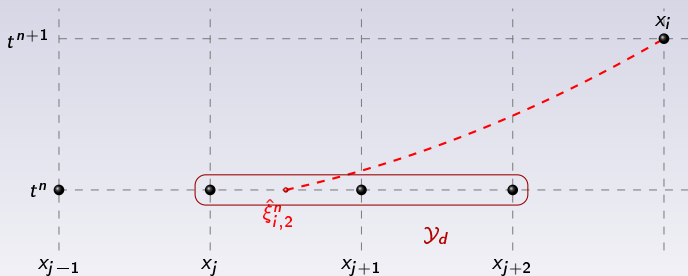


Schéma MOC pour l'advection

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$

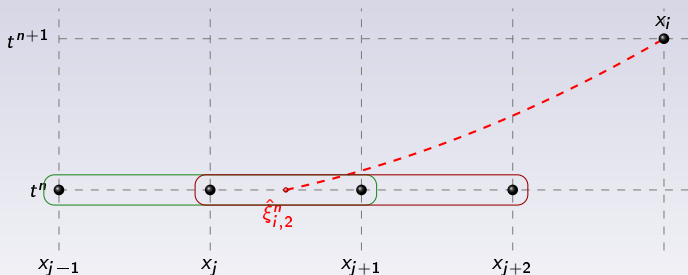


Schéma MOC pour l'advection

On se donne un maillage (x_i) en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$

Schéma numérique :

$$\theta_{ij}^n = \frac{x_{j+1} - \xi_i^n}{\Delta x}$$

$$Y_i^{n+1} = \alpha_{ij}^n \left[\overbrace{-\frac{\theta_{ij}^n(1-\theta_{ij}^n)}{2} Y_{j-1}^n + \theta_{ij}^n(2-\theta_{ij}^n) Y_j^n + \frac{(1-\theta_{ij}^n)(2-\theta_{ij}^n)}{2} Y_{j+1}^n}^{\mathcal{Y}_g(\theta_{ij}^n)} \right] \\ + (1-\alpha_{ij}^n) \left[\underbrace{\frac{\theta_{ij}^n(1+\theta_{ij}^n)}{2} Y_j^n + \left[1 - (\theta_{ij}^n)^2\right] Y_{j+1}^n - \frac{\theta_{ij}^n(1-\theta_{ij}^n)}{2} Y_{j+2}^n}_{\mathcal{Y}_d(\theta_{ij}^n)} \right]$$

Analyse du schéma

Stabilité inconditionnelle (au sens de *Von Neumann*)

Consistance inconditionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) := & \frac{1}{\Delta t} \left[Y(t^{n+1}, x_i) - \frac{\theta^2}{2} [Y(t^n, x_{j-1}) - 2Y(t^n, x_j) + Y(t^n, x_{j+1})] \right. \\ & \left. + \frac{\theta}{2} [Y(t^n, x_{j-1}) - 4Y(t^n, x_j) + 3Y(t^n, x_{j+1})] - Y(t^n, x_{j+1}) \right]. \end{aligned}$$

Pour $\Delta t = \Delta x^\alpha$, on a :

- $\mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta t^{1/\alpha}) = \mathcal{O}(\Delta t^2)$, $\alpha \leq 1$;
- $\mathcal{E}_i^n(\Delta x^\alpha, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta x^2)$, $\alpha > 1$.

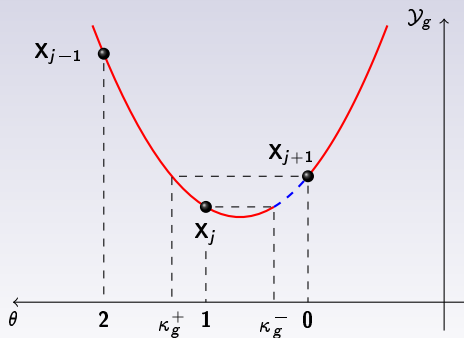
Dans le cas général :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Principe du maximum

On souhaite garantir :

$$Y_i^{n+1} \in \left[\min_{k \in \mathcal{V}(j)} Y_k^n, \max_{k \in \mathcal{V}(j)} Y_k^n \right], \quad \mathcal{V}(j) = \{j, j+1\}.$$



Principe du maximum

On souhaite garantir :

$$Y_i^{n+1} \in \left[\min_{k \in \mathcal{V}(j)} Y_k^n, \max_{k \in \mathcal{V}(j)} Y_k^n \right], \quad \mathcal{V}(j) = \{j, j+1\}.$$

Condition nécessaire et suffisante pour que le schéma “gauche” (resp. “droit”) vérifie ce principe :

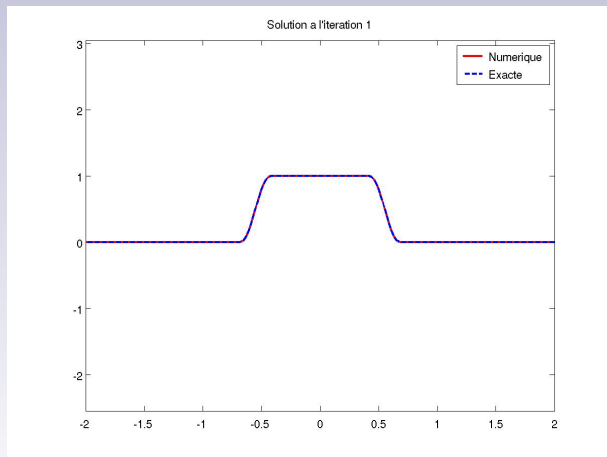
$$\theta_{ij}^n \notin]\kappa_g^-, \kappa_g^+[\quad \text{resp. }]\kappa_d^-, \kappa_d^+[,$$

avec :

$$\begin{aligned} \kappa_g^- &= \frac{2(Y_{j+1}^n - Y_j^n)}{Y_{j-1}^n - 2Y_j^n + Y_{j+1}^n}, & \kappa_d^- &= \frac{2(Y_{j+1}^n - Y_j^n)}{Y_j^n - 2Y_{j+1}^n + Y_{j+2}^n}, \\ \kappa_g^+ &= \frac{Y_{j-1}^n - 4Y_j^n + 3Y_{j+1}^n}{Y_{j-1}^n - 2Y_j^n + Y_{j+1}^n}, & \kappa_d^+ &= \frac{Y_{j+2}^n - Y_j^n}{Y_j^n - 2Y_{j+1}^n + Y_{j+2}^n}. \end{aligned}$$

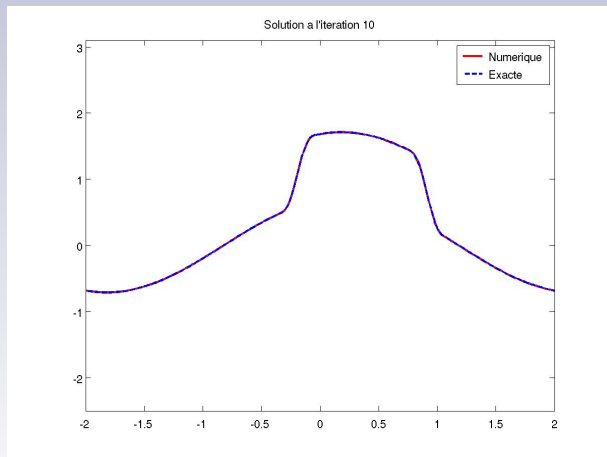
Ce critère permet de choisir la valeur de α_{ij}^n .

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



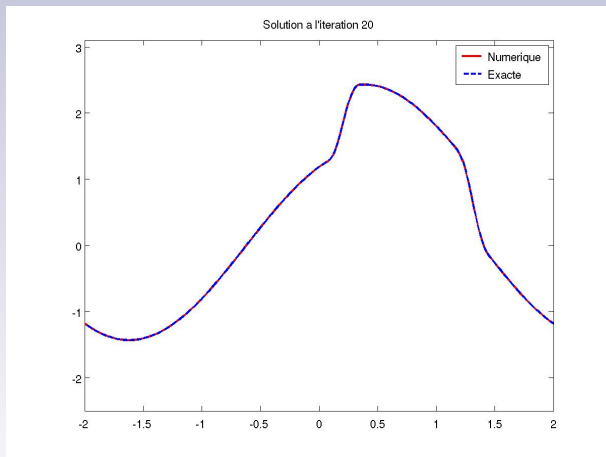
$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



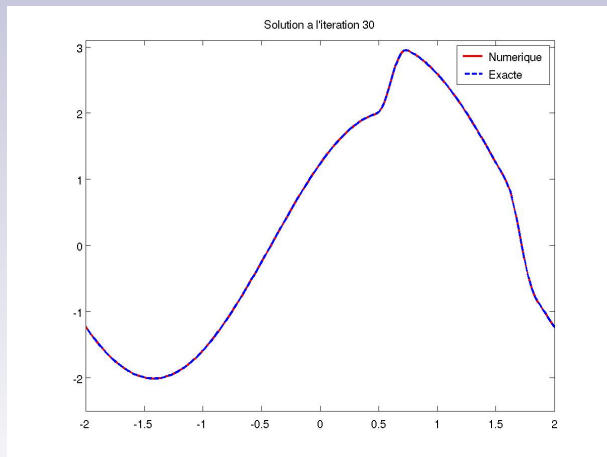
$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



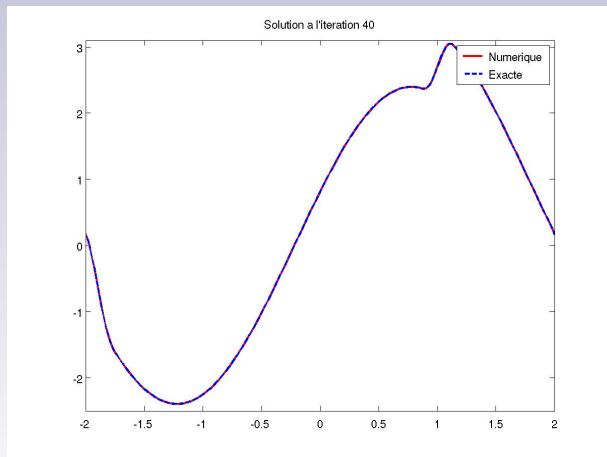
$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



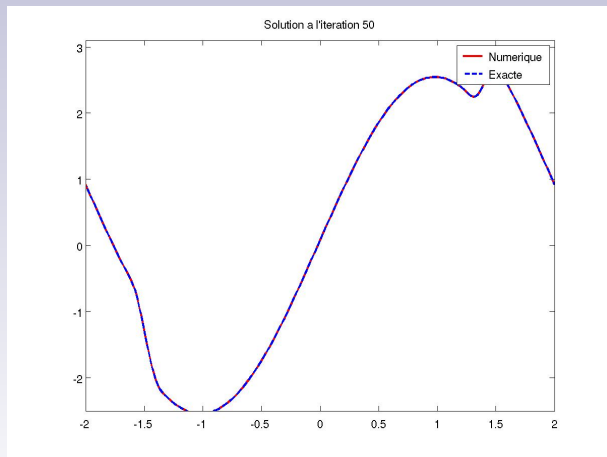
$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



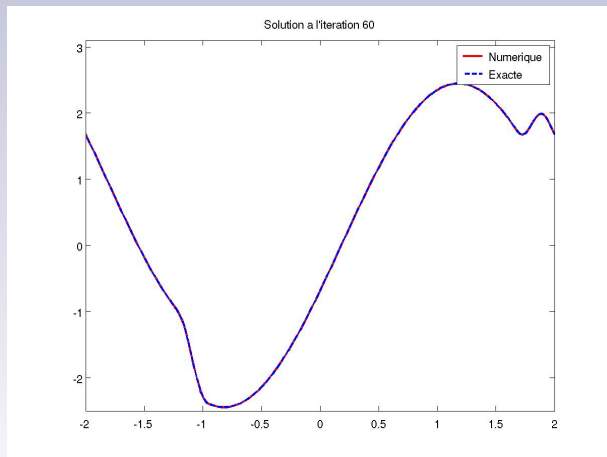
$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



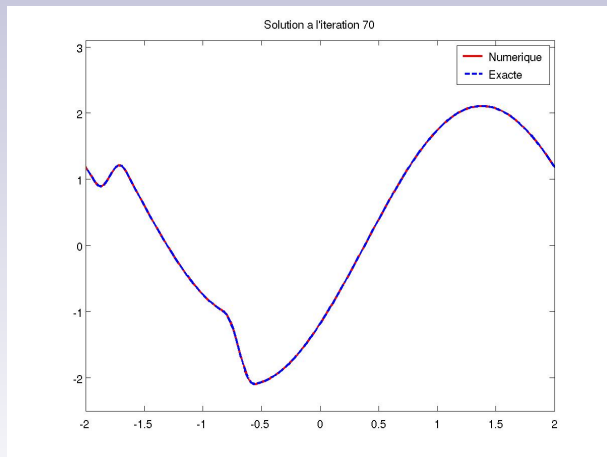
$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



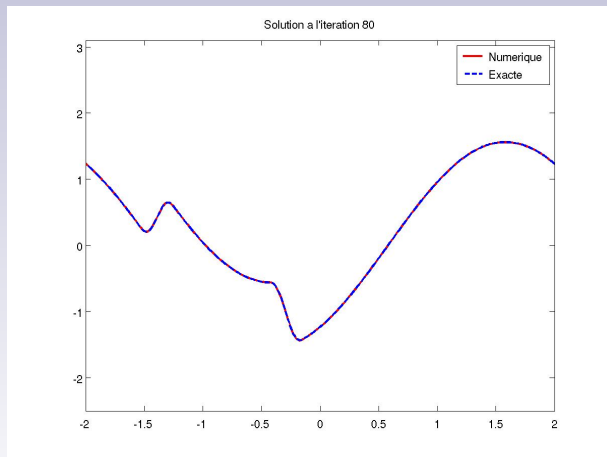
$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



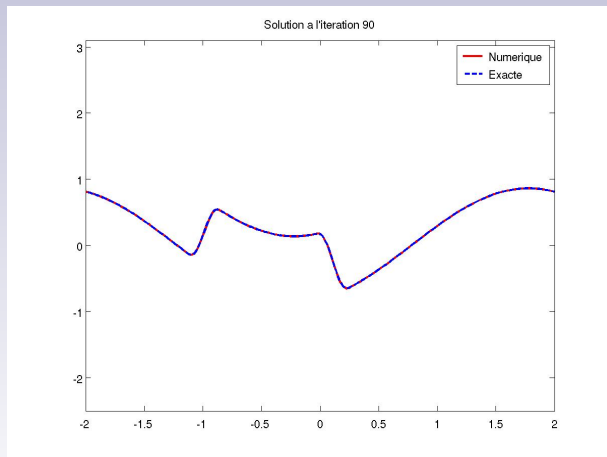
$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



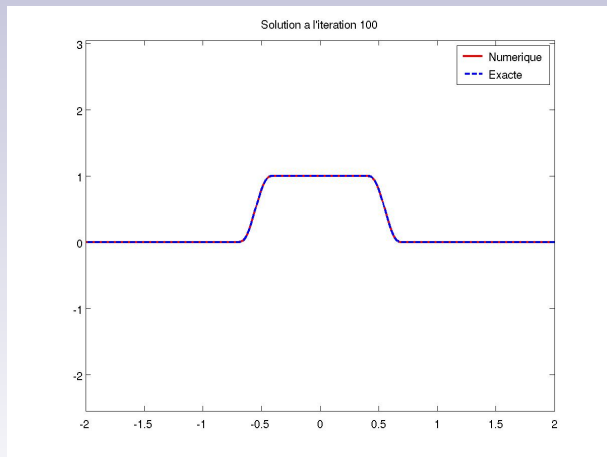
$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



$$N_t = 100, N_x = 450$$

Schéma MOC pour l'advection-diffusion

$$\partial_t T + u \partial_x T - \varepsilon \partial_{xx}^2 T = 0 \iff \frac{\partial}{\partial t} [T(t, \mathcal{X}(t; s, x))] = \varepsilon \partial_{xx}^2 T(t, \mathcal{X}(t; s, x))$$

- Une première idée : schéma explicite

$$\frac{T_i^{n+1} - \hat{T}^n(\xi_i^n)}{\Delta t} = \widehat{\partial_{xx}^2 T}^n(\xi_i^n)$$

La condition de stabilité est sévère ($\Delta t \ll \Delta x^2$).

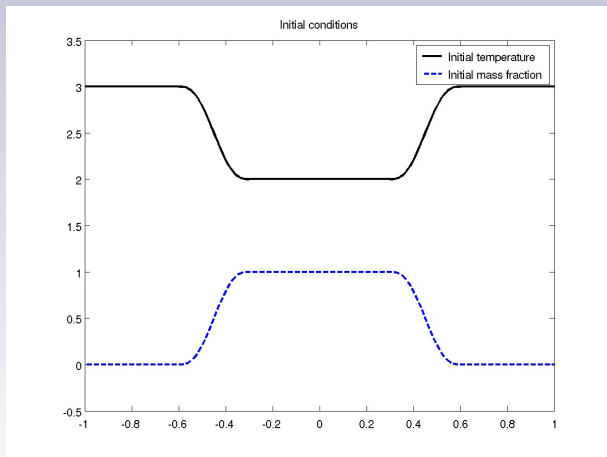
- Une meilleure idée : schéma implicite

$$\frac{T_i^{n+1} - \hat{T}^n(\xi_i^n)}{\Delta t} = \partial_{xx}^2 T_i^{n+1}$$

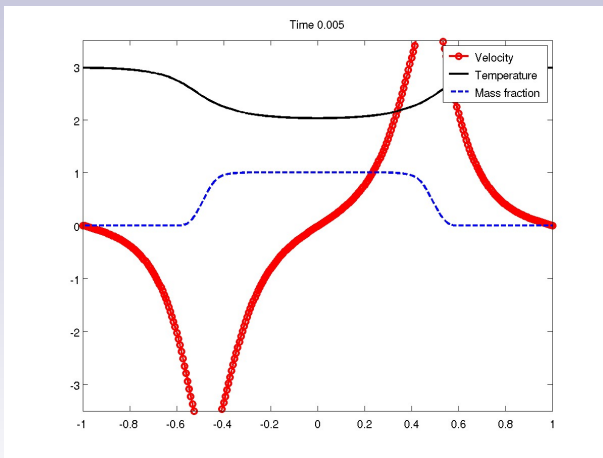
On obtient une M -matrice symétrique, ce qui garantit le **principe du maximum**.

On peut encore améliorer la précision par une formule des trapèzes.

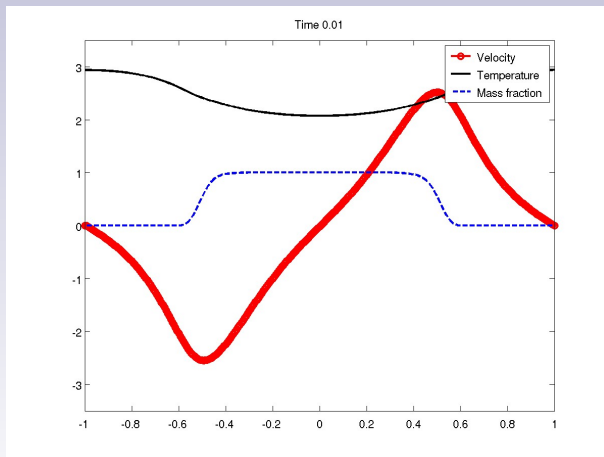
Un résultat sur le modèle DLMN



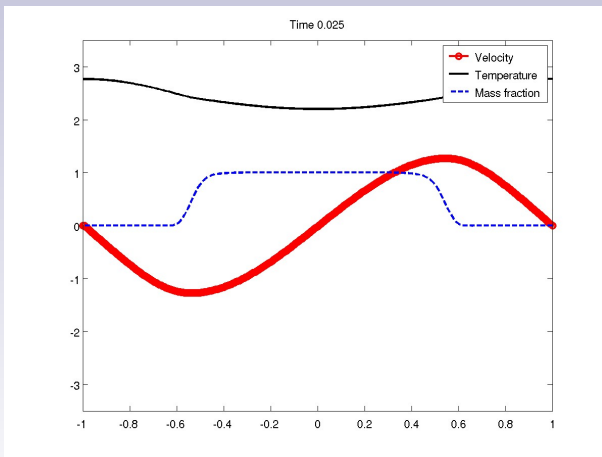
Un résultat sur le modèle DLMN



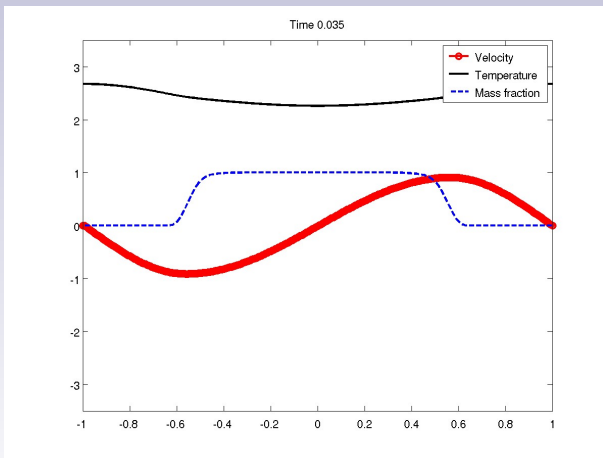
Un résultat sur le modèle DLMN



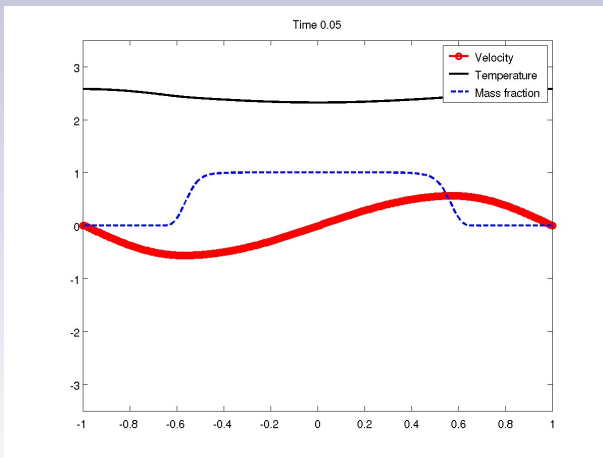
Un résultat sur le modèle DLMN



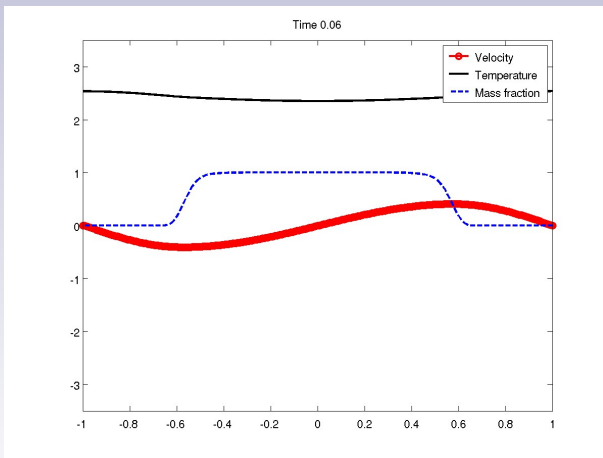
Un résultat sur le modèle DLMN



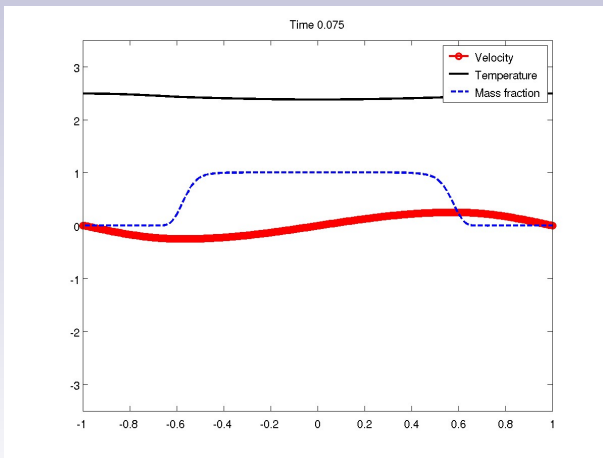
Un résultat sur le modèle DLMN



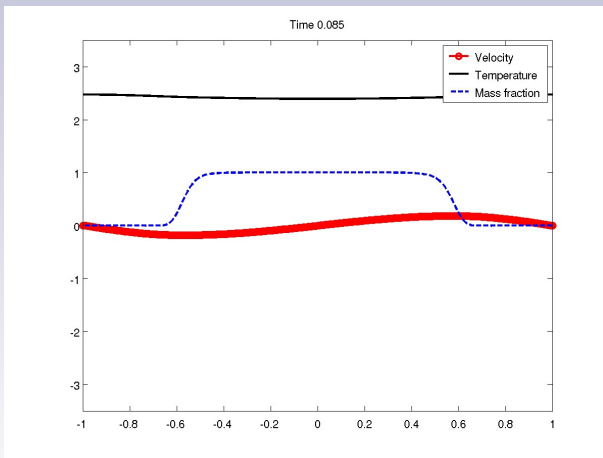
Un résultat sur le modèle DLMN



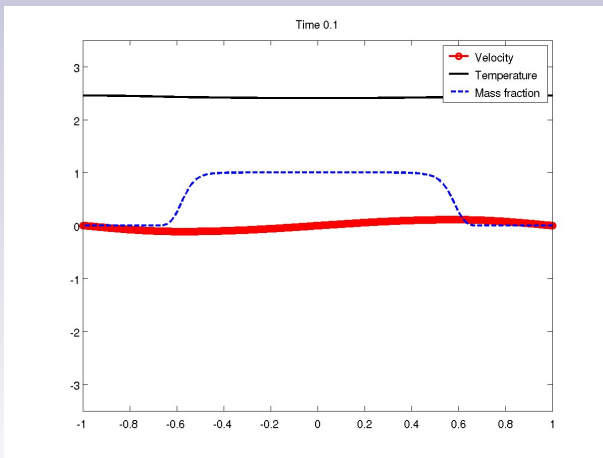
Un résultat sur le modèle DLMN



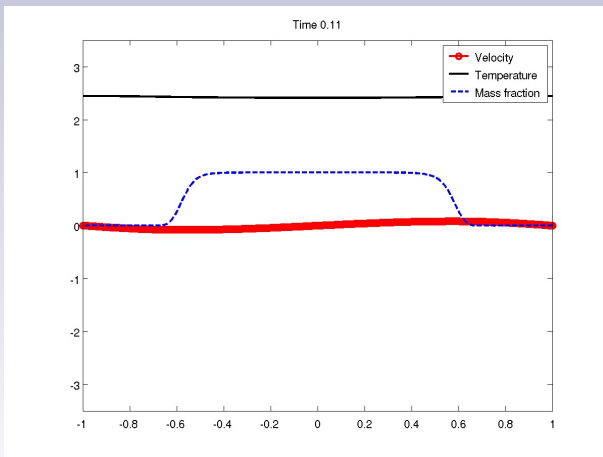
Un résultat sur le modèle DLMN



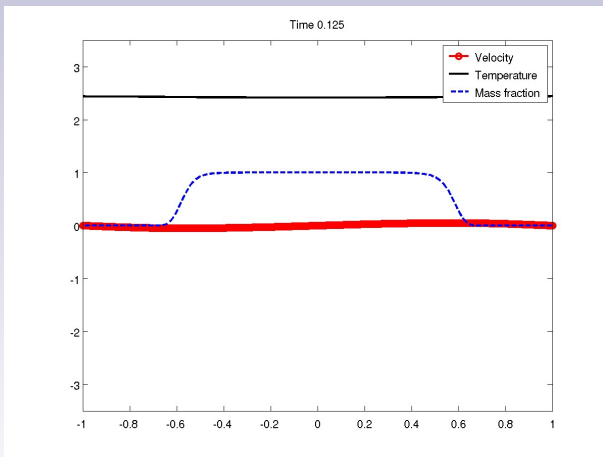
Un résultat sur le modèle DLMN



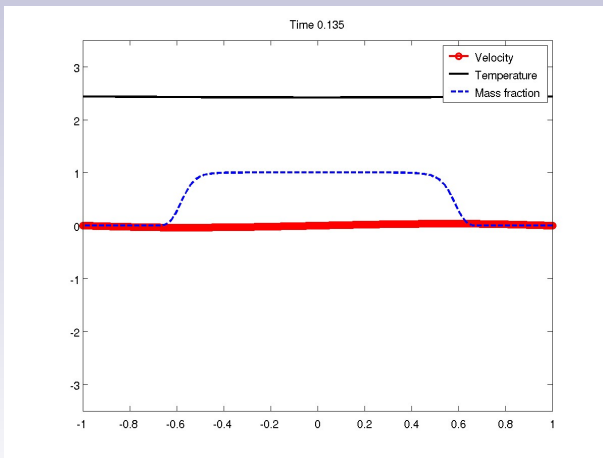
Un résultat sur le modèle DLMN



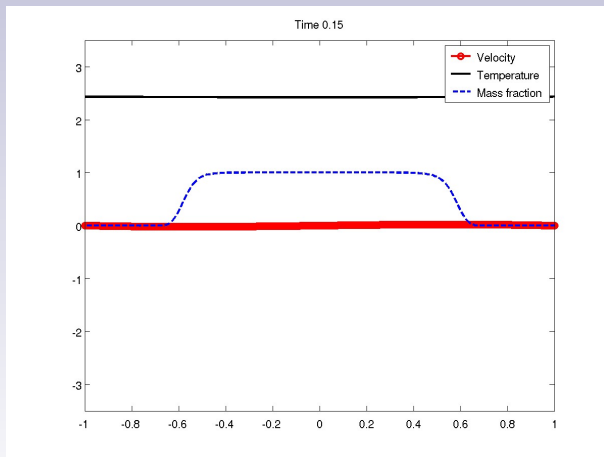
Un résultat sur le modèle DLMN



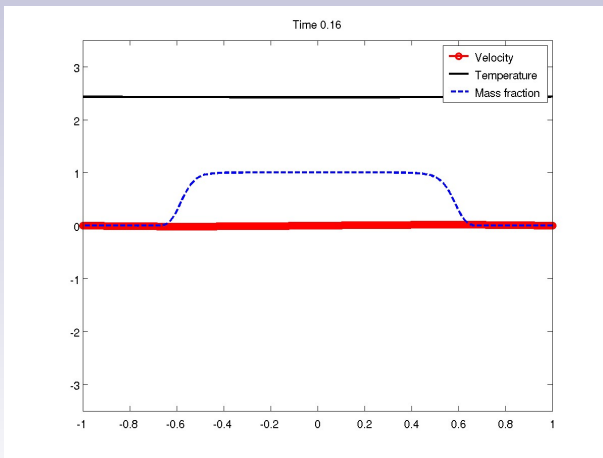
Un résultat sur le modèle DLMN



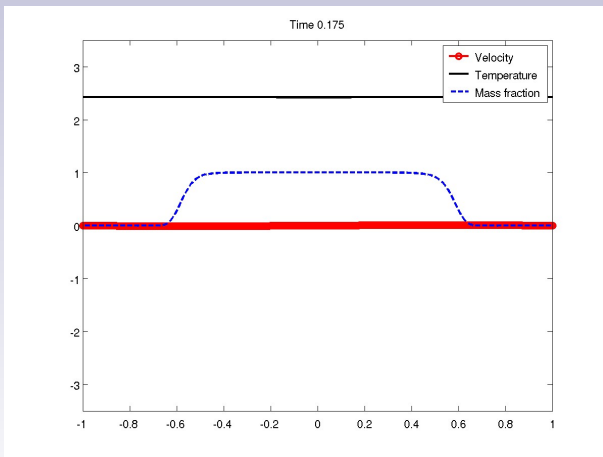
Un résultat sur le modèle DLMN



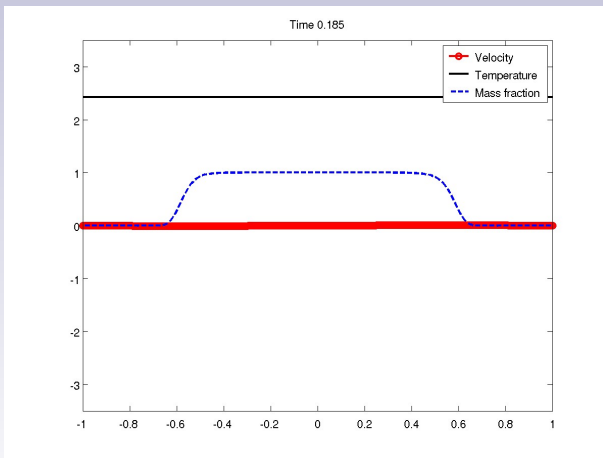
Un résultat sur le modèle DLMN



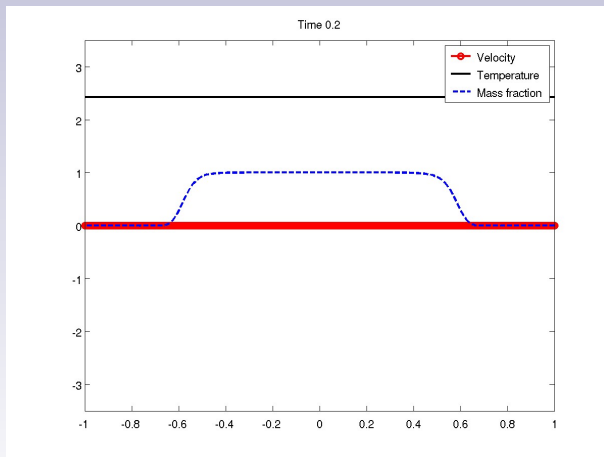
Un résultat sur le modèle DLMN



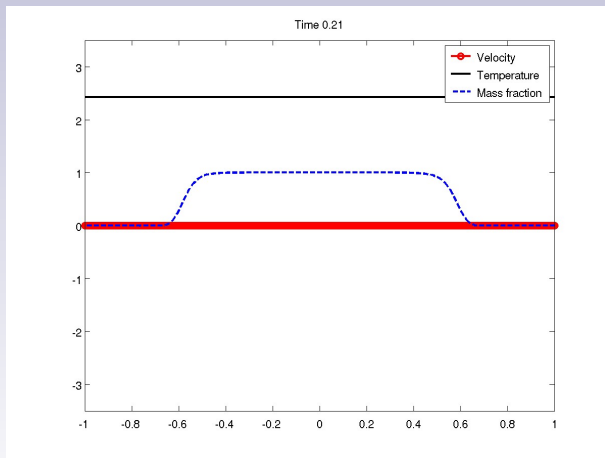
Un résultat sur le modèle DLMN



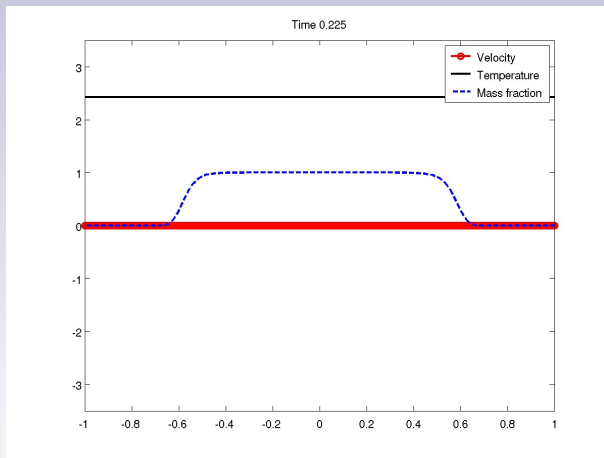
Un résultat sur le modèle DLMN



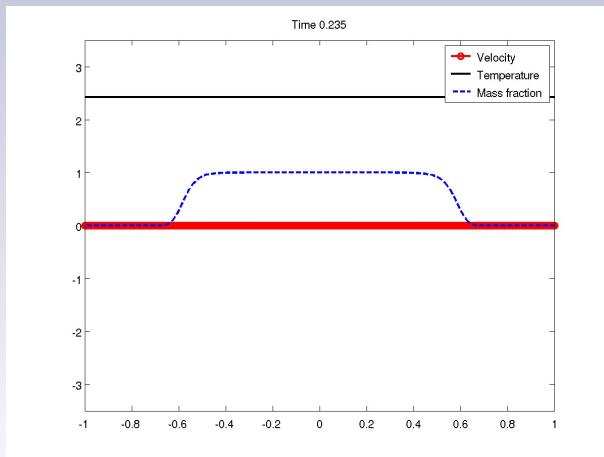
Un résultat sur le modèle DLMN



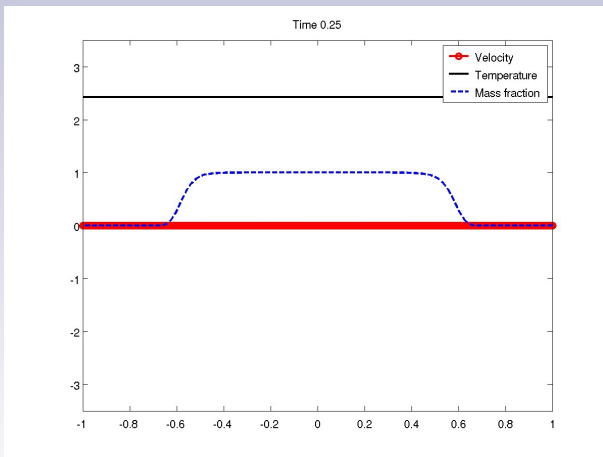
Un résultat sur le modèle DLMN



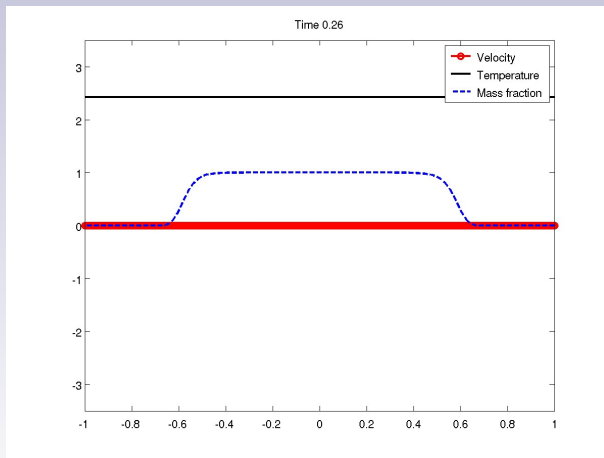
Un résultat sur le modèle DLMN



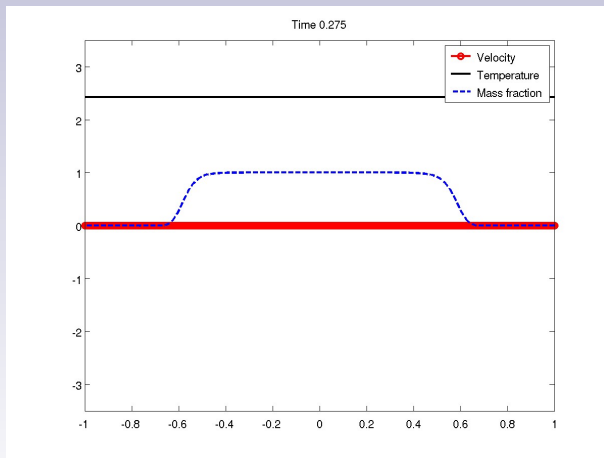
Un résultat sur le modèle DLMN



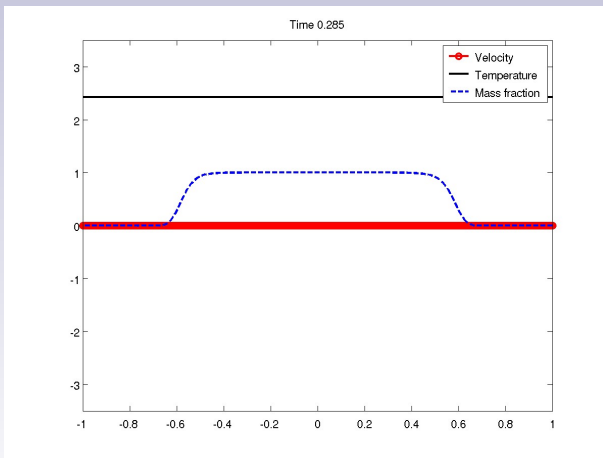
Un résultat sur le modèle DLMN



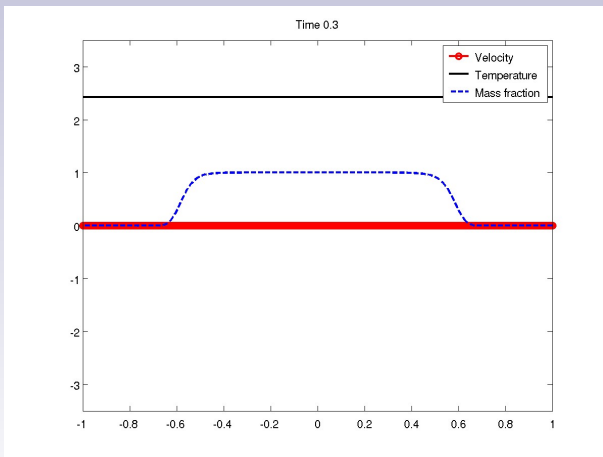
Un résultat sur le modèle DLMN



Un résultat sur le modèle DLMN



Un résultat sur le modèle DLMN



Conclusions et perspectives

La méthode des caractéristiques a permis :

- ✓ de construire une solution (faible, classique) globale en temps
- ✓ de suivre le profil des solutions
- ✓ de construire des schémas avec de “bonnes” propriétés numériques

À faire :

- ✗ L'extension à la dimension 2 (naturelle pour le numérique, moins pour le théorique)
- ✗ La preuve de convergence du schéma pour le système DLMN
- ✗ Le couplage avec l'EDO sur la pression
- ✗ L'étude du choix du coefficient α_{ij}^n

A large, clear glass sphere is centered in the frame, set against a soft, out-of-focus green background. Inside the sphere, a miniature, inverted landscape is visible. The scene is upside down, with a dense forest of green trees at the top and a body of water at the bottom. The water's surface is slightly rippled, and the reflection of the trees is visible. The sphere's surface is smooth and reflects the surrounding environment, creating a subtle double-exposure effect. The overall mood is serene and contemplative.

MERCI DE VOTRE ATTENTION