

Analyse théorique et numérique d'un modèle bas Mach pour l'étude d'écoulements à bulles

Yohan Penel¹

¹INRIA Lille - Nord Europe, EPI SIMPAF

Travaux réalisés au CEA Saclay et au LAGA (Paris 13)

Séminaire **Analyse Numérique & EDP**

Lille – 31 mars 2011

Schéma d'étude

🐛 **Objectif** : simuler le comportement de bulles dans les cœurs de réacteurs nucléaires

🐛 **Étapes** :

- ➡ Choix du modèle (critères physiques et pratiques)
- ➡ Preuve du **caractère bien posé** du modèle
- ➡ Étude de la **pertinence** du modèle (propriétés physiques)
- ➡ Développement de **schémas numériques** pour le traitement du modèle
- ➡ Simulations / Interprétations

Schéma d'étude

🐞 **Objectif** : simuler le comportement de bulles dans les cœurs de réacteurs nucléaires

🐞 **Étapes** :

- ➡ **Choix** du modèle (critères physiques et pratiques)
- ➡ Preuve du **caractère bien posé** du modèle
- ➡ Étude de la **pertinence** du modèle (propriétés physiques)
- ➡ Développement de **schémas numériques** pour le traitement du modèle
- ➡ Simulations / Interprétations

Schéma d'étude

🐞 **Objectif** : simuler le comportement de bulles dans les cœurs de réacteurs nucléaires

🐞 **Étapes** :

- ➡ **Choix** du modèle (critères physiques et pratiques)
- ➡ Preuve du **caractère bien posé** du modèle
- ➡ Étude de la **pertinence** du modèle (propriétés physiques)
- ➡ Développement de **schémas numériques** pour le traitement du modèle
- ➡ Simulations / Interprétations

Introduction de **modèles simplifiés** pour des études préalables

Méthodes et outils de base

🐞 Établissement du modèle

- ➡ **Décomposition de Leray** pour les champs L^2 :

$$\mathbf{u} = \mathcal{P}\mathbf{u} + \mathcal{Q}\mathbf{u}, \text{ avec } \nabla \cdot \mathcal{P}\mathbf{u} = 0, \mathcal{P}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \text{ et } \mathcal{Q}\mathbf{u} = \nabla q.$$

- ➡ **Développement asymptotique** (formel) à bas nombre de *Mach*

🐞 Existence de solutions (pour des données initiales de type *Sobolev*)

- ➡ Construction d'une suite de type **itérée de Picard**
- ➡ Estimations « d'énergie »

🐞 Construction de solutions et de schémas numériques

- ➡ **Méthode des caractéristiques**

Plan de l'exposé

1 Différents modèles

2 Étude qualitative du modèle ABV

- Données régulières
- Principe du maximum
- Étude du cas de la dimension 1
- Outils pour la simulation numérique du modèle

3 Conclusions et perspectives

Plan de la partie

- 1 Différents modèles
- 2 Étude qualitative du modèle ABV
- 3 Conclusions et perspectives



Écoulement diphasique compressible

Origine

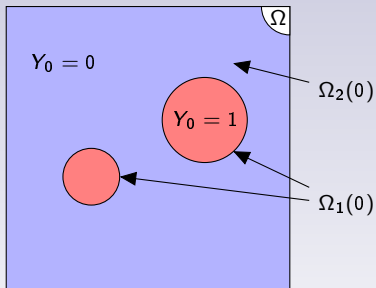
$$\text{Navier-Stokes} \quad \begin{cases} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \end{cases}$$

Nomenclature

- 👉 Y : fraction massique de la phase vapeur (fluide 1)
- 👉 T : température
- 👉 P : pression
- 👉 \mathbf{u} : vitesse globale
- 👉 $E = \varepsilon + |\mathbf{u}|^2/2$: énergie totale
- 👉 ρ : densité
- 👉 \mathbf{g} : champ de gravité
- 👉 $\boldsymbol{\sigma}$: tenseur de contraintes de Cauchy
- 👉 κ : conductivité thermique

Modélisation des bulles

Condition Initiale



$$Y(t=0, x) = Y_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \Omega_1(0), \\ 0, & \text{si } x \in \Omega_2(0). \end{cases}$$

- Hypothèse de **non-miscibilité** des deux phases (fluides) : singularité de Y
- **Interface** de la bulle = surface de **discontinuité** de Y

Résoudre l'équation de transport $\partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0 \iff \partial_t Y + \mathbf{u} \cdot \nabla Y = 0$ revient à déterminer le domaine $\Omega_1(t)$.

Généalogie des modèles étudiés

Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \end{cases}$$

Conditions initiales et aux limites

- Domaine d'étude : Ω , **borné** dans \mathbb{R}^d ($d \in \{1, 2, 3\}$) et **lipschitzien**
- Données : $\mathbf{u}_0, Y_0, T_0, \rho_0$
- Conditions sur le bord : $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \nabla T \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$

Généalogie des modèles étudiés

Navier-Stokes sous forme non conservative

$$\begin{cases} D_t Y = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T D_t P + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \boldsymbol{\sigma} :: \nabla \mathbf{u}. \end{cases}$$

Notations :

$$D_t = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \quad ; \quad \alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad ; \quad c_p = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P.$$

Lois d'état : $\varepsilon(Y, T, P)$, $\rho(Y, T, P)$

Généalogie des modèles étudiés

Navier-Stokes sous forme adimensionnée

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\frac{1}{M^2} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{\rho}{\text{Fr}} \mathbf{e}_3, \\ \rho c_p D_t T = \beta_* \alpha T D_t P + \frac{\nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} + \frac{M^2}{\text{Re}} \boldsymbol{\sigma} :: \nabla \mathbf{u}. \end{array} \right.$$

Notation :

$$\beta_* = \frac{\alpha_* P_*}{\rho_* c_{p,*}}.$$

Les deux fluides sont supposés avoir des propriétés physiques équivalentes, de sorte que l'on puisse définir des grandeurs caractéristiques communes.

Généalogie des modèles étudiés

Système DLMN – S. Dellacherie ('05), Y.P. ('09)

$$\begin{cases} D_t Y = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \pi + 2\nabla \cdot (\mu D(\mathbf{u})) + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \end{cases}$$

Outils :

- Développement asymptotique par rapport à $M \ll 1$
- Projection de Leray : $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla \phi$, avec $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ et $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$
- Réécriture de la loi de conservation de la masse :

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P}$$

Généalogie des modèles étudiés

Systeme DLMN – S. Dellacherie ('05), Y.P. ('09)

$$\begin{cases} D_t Y = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \pi + 2\nabla \cdot (\mu D(\mathbf{u})) + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \end{cases}$$

Outils :

- Développement asymptotique par rapport à $M \ll 1$
- Projection de Leray : $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla \phi$, avec $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ et $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$
- Réécriture de la loi de conservation de la masse :

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P} \implies P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t).$$

Généalogie des modèles étudiés

Systeme DLMN à viscosité constante

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \pi + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{array} \right. \quad (\text{DLMN-}\mu)$$

Généalogie des modèles étudiés

Système DLMN à viscosité constante (découplage du champ de vitesse)

$$\left\{ \begin{array}{l}
 D_t Y = 0, \\
 \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \\
 \rho D_t \mathbf{w} = -\nabla \pi + \mu \Delta \mathbf{w} + \rho \mathbf{g} - \rho D_t \nabla \phi, \\
 \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\
 P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t), \\
 \mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla \phi.
 \end{array} \right. \quad (\text{DLMN-}\mu')$$

Généalogie des modèles étudiés

Systeme DLMN potentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0, \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{array} \right. \quad (\text{DLMN-p})$$

Hypothèse :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi.$$

D'où la nouvelle notation $D_t = \partial_t + (\nabla \phi \cdot \nabla)$.

On s'abstrait ainsi des deux équations de type Navier-Stokes incompressible linéarisé.

Généalogie des modèles étudiés

Systeme DLMN à β constant

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \\ \alpha p_0 (\partial_t T + \nabla \phi \cdot \nabla T) = \mathcal{G}_\theta. \end{cases} \quad (\text{DLMN-}\beta)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \beta \equiv \beta_0 &\implies P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t) = 0 \\ &\implies P(t) = p_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_\theta = \beta_0 \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \end{aligned}$$

Généalogie des modèles étudiés

Modèle Abstrait de Vibration de Bulles

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_Y(t, \mathbf{x}) := \psi(t) \left[Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right]. \end{cases} \quad (\text{ABV})$$

Pulsation (donnée) : $\psi \in \mathcal{C}^0(0, +\infty)$.

Conditions initiales et aux limites

$$\bullet Y(0, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}) \implies \Delta \phi_0 = \mathcal{G}_{Y_0}$$

$$\bullet \nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \implies \text{condition de } \mathbf{jauge} : \int_{\Omega} \phi(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

Le modèle ABV est un système **intégro-différentiel** couplant une équation hyperbolique et une équation elliptique.

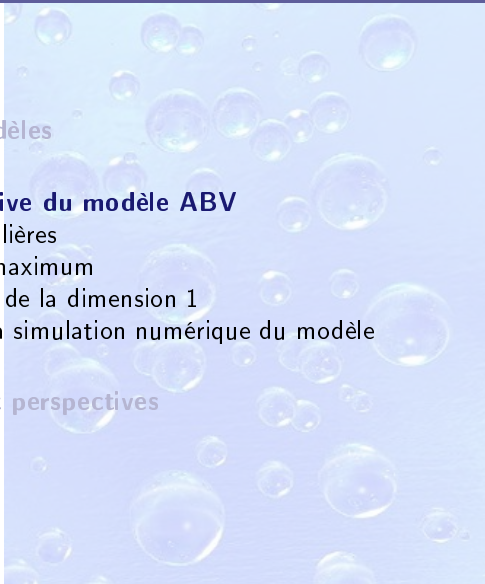
Plan de la partie

1 Différents modèles

2 Étude qualitative du modèle ABV

- Données régulières
- Principe du maximum
- Étude du cas de la dimension 1
- Outils pour la simulation numérique du modèle

3 Conclusions et perspectives



Problème bien posé

Théorème (S. Dellacherie & O. Lafitte ('05) ; Y.P. ('10))

Soit $Y_0 \in H^s(\Omega)$, $s \geq s_0 + 1$. Alors il existe $\mathcal{T} > 0$ pour lequel le modèle ABV admet une unique solution classique Y sur $[0, \mathcal{T}]$.

On a noté $s_0 = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1$. Le résultat qui est prouvé fournit la régularité :

$$Y \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega) := \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], H^s(\Omega)).$$

Théorème (Y.P. ('10))

La solution existe sur l'intervalle $[0, \mathcal{T}_*]$, avec $\mathcal{T}_* > 0$ donné par :

$$\left\| Y_0 - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y_0(x) dx \right\|_s \cdot \int_0^{\mathcal{T}_*} |\psi(t)| dt \leq C_*(s, d, \Omega).$$

Remarques

- Trois contraintes de convergence dans [*Dellacherie et Lafitte*, CRM-3200, 2005], réduites à **une seule** ici
- Temps d'existence **propre à la méthode** choisie pour construire une solution
- Formule compatible avec les cas particuliers : $Y_0 \equiv \text{cste}$ et $\psi \equiv 0$
($\mathcal{T}_* = +\infty$)
- Solution **globale en temps** pour $\psi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ de norme suffisamment petite

Lemme

Soient \mathbf{u} et f dans $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$ pour $\mathcal{T} > 0$ et $s \geq s_0 + 1$ avec $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$. Alors, pour $Y_0 \in H^s(\Omega)$, l'équation hyperbolique linéaire $\partial_t Y + \mathbf{u} \cdot \nabla Y = f$ admet une unique solution classique $Y \in \mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$, qui vérifie, pour tout $r \in \{0, \dots, s\}$, l'estimation :

$$\|Y\|_{r,\mathcal{T}} \leq e^{\chi_r(\mathcal{T})} \left(\|Y_0\|_r + \int_0^{\mathcal{T}} e^{-\chi_r(t)} \|f(t, \cdot)\|_r dt \right).$$

Remarques

Étude des espaces $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$

- ✪ Pour tous $s \in \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{T} > 0$, $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$ est un **espace de Banach**, muni de la norme :

$$\|f\|_{s,\mathcal{T}} := \sup_{t \in [0,\mathcal{T}]} \|f(t, \cdot)\|_s.$$

- ✪ Pour tout $s' \in [0, s[$, $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], H^{s'}(\Omega))$.
 ➡ En particulier, pour $s \geq s_0$, $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}] \times \bar{\Omega})$.
- ✪ Si $f \in \mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$, alors $\nabla f \in \mathcal{W}_{s-1,\mathcal{T}}(\Omega)$, $s > 1$.
- ✪ Si $(f, g) \in \mathcal{W}_{s_1,\mathcal{T}}(\Omega) \times \mathcal{W}_{s_2,\mathcal{T}}(\Omega)$, alors $f \times g \in \mathcal{W}_{s_3,\mathcal{T}}(\Omega)$, avec $s_3 = \min\{s_1, s_2, s_1 + s_2 - s_0\}$.

Ébauche de la preuve

Système itératif

Étant donnée la solution $(Y^{(k)}, \phi^{(k)})$ à l'itération k , on résout :

$$\begin{cases} \partial_t Y^{(k+1)} + \nabla \phi^{(k)} \cdot \nabla Y^{(k+1)} = 0, \\ Y^{(k+1)}(0, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}), \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} \Delta \phi^{(k+1)} = \psi(t) \left[Y^{(k+1)}(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^{(k+1)}(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right], \\ \nabla \phi^{(k+1)} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left(\int_{\Omega} \phi^{(k+1)}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right). \end{cases}$$

Initialisation : $Y^{(k=0)} = Y_0$ et $\phi^{(k=0)}$ compatible.

Le système itératif est bien défini. Les équations étant linéaires, le temps d'existence de chaque terme est infini (temps d'existence de $Y^{(0)}$).

Ébauche de la preuve (caractère borné)

En composant les estimations *a priori* pour chaque équation, on aboutit à :

$$\|Y^{(k+1)}\|_{s,\mathcal{T}} \leq \|Y_0\|_s \exp \left[C_{abv}(s) \cdot \|Y^{(k)}\|_{s,\mathcal{T}} \cdot \int_0^{\mathcal{T}} |\psi(t)| dt \right].$$

L'étude de la suite récurrente définie par $u_{k+1} = \Phi(u_k)$ avec

$$\Phi(x) = u_0 \exp(x) \quad \text{et} \quad u_0(\mathcal{T}) = C_{abv}(s) \cdot \|Y_0\|_s \cdot \int_0^{\mathcal{T}} |\psi(t)| dt$$

montre que la suite converge à condition que \mathcal{T}_1 vérifie $u_0(\mathcal{T}_1) \leq e^{-1}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|Y^{(k)}\|_{s,\mathcal{T}_1} \leq e^{x_1} \|Y_0\|_s,$$

avec $x_1 \leq 1$ tel que $x_1 \exp(-x_1) = u_0$. La suite $(Y^{(k)})$ est donc bornée dans $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}_1}(\Omega)$.

Ébauche de la preuve (contraction)

En écrivant la différence de deux itérations successives, il vient, pour $t \in [0, \mathcal{T}_1]$:

$$\begin{aligned} & \| (Y^{(k+1)} - Y^{(k)})(t, \cdot) \|_0 \\ & \leq C_{abv,2}(s, d, \Omega, \psi, \mathcal{T}_1) e^{\chi_0^{(k)}(t)} \int_0^t e^{-\chi_0^{(k)}(\tau)} \| (Y^{(k)} - Y^{(k-1)})(\tau, \cdot) \|_0 d\tau. \end{aligned}$$

Ébauche de la preuve (contraction)

En écrivant la différence de deux itérations successives, il vient, pour $t \in [0, \mathcal{T}_1]$:

$$\begin{aligned} & \| (Y^{(k+1)} - Y^{(k)})(t, \cdot) \|_0 \\ & \leq C_{abv,2}(s, d, \Omega, \psi, \mathcal{T}_1) e^{\chi(t)} \int_0^t e^{-\chi(\tau)} \| (Y^{(k)} - Y^{(k-1)})(\tau, \cdot) \|_0 d\tau. \end{aligned}$$

Ébauche de la preuve (contraction)

En écrivant la différence de deux itérations successives, il vient, pour $t \in [0, \mathcal{T}_1]$:

$$\begin{aligned} & \| (Y^{(k+1)} - Y^{(k)})(t, \cdot) \|_0 \\ & \leq C_{abv,2}(s, d, \Omega, \psi, \mathcal{T}_1) e^{\chi(t)} \int_0^t e^{-\chi(\tau)} \| (Y^{(k)} - Y^{(k-1)})(\tau, \cdot) \|_0 d\tau. \end{aligned}$$

D'où, en itérant :

$$\| Y^{(k+1)} - Y^{(k)} \|_{0, \mathcal{T}_1} \leq \frac{(C_{abv,2} \cdot \mathcal{T}_1)^k}{k!} e^{\chi(\mathcal{T}_1)} \| Y^{(1)} - Y^{(0)} \|_{0, \mathcal{T}_1}.$$

La suite est ainsi de *Cauchy* dans $\mathcal{W}_{0, \mathcal{T}_1}(\Omega)$ qui est complet, donc est convergente.

Ébauche de la preuve (conclusion)

- La suite $(Y^{(k)})$ est bornée dans $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}_1}(\Omega)$ donc **converge faiblement-*** vers $\tilde{Y} \in \mathcal{W}_{s,\mathcal{T}_1}(\Omega)$
- La suite $(Y^{(k)})$ **converge fortement** dans $\mathcal{W}_{0,\mathcal{T}_1}(\Omega)$ vers $Y \in \mathcal{W}_{0,\mathcal{T}_1}(\Omega)$

Par unicité de la limite, $Y = \tilde{Y} \in \mathcal{W}_{s,\mathcal{T}_1}(\Omega)$. Par interpolation, la convergence est **forte** dans $\mathcal{W}_{s',\mathcal{T}_1}(\Omega)$ pour tout $s' < s$ et faible-* dans $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}_1}(\Omega)$. Il en est de même pour la suite $(\phi^{(k)})$ qui converge vers $\phi \in \mathcal{W}_{s+2,\mathcal{T}_1}(\Omega)$.

Ébauche de la preuve (conclusion)

- La suite $(Y^{(k)})$ est bornée dans $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}_1}(\Omega)$ donc **converge faiblement-*** vers $\tilde{Y} \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}_1}(\Omega)$
- La suite $(Y^{(k)})$ **converge fortement** dans $\mathcal{W}_{0, \mathcal{T}_1}(\Omega)$ vers $Y \in \mathcal{W}_{0, \mathcal{T}_1}(\Omega)$

Par unicité de la limite, $Y = \tilde{Y} \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}_1}(\Omega)$. Par interpolation, la convergence est **forte** dans $\mathcal{W}_{s', \mathcal{T}_1}(\Omega)$ pour tout $s' < s$ et faible-* dans $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}_1}(\Omega)$. Il en est de même pour la suite $(\phi^{(k)})$ qui converge vers $\phi \in \mathcal{W}_{s+2, \mathcal{T}_1}(\Omega)$.

Par passage à la limite (théorème de convergence dominée) dans les égalités :

$$Y^{(k+1)} = Y_0 - \int_0^t \nabla \phi^{(k)} \cdot \nabla Y^{(k+1)} \, d\tau,$$

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \phi^{(k+1)} \, dx = -\psi(t) \int_{\Omega} \varphi (Y^{(k+1)} - \mu(Y^{(k+1)})) \, dx,$$

on parvient à la conclusion que Y et ϕ sont solutions du modèle ABV.

Ébauche de la preuve (temps d'existence)

Amélioration de la contrainte de temps

- ① Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega] \iff Y - c$ solution de $\mathcal{ABV}[Y_0 - c, \psi, \Omega]$
- ② Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ sur $[0, \mathcal{T}]$ avec :

$$e \cdot C_{abv}(s) \cdot \|Y_0\|_s \cdot \int_0^{\mathcal{T}} |\psi(t)| dt \leq 1.$$

Or, le réel $c_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y_0(\mathbf{x}) dx$ vérifie : $\|Y_0 - c_0\|_s = \min_{c \in \mathbb{R}} \|Y_0 - c\|_s \leq \|Y_0 - 0\|_s$.

Ainsi, si Z est solution de $\mathcal{ABV}[Y_0 - c_0, \psi, \Omega]$, son temps d'existence est donné par :

$$e \cdot C_{abv}(s) \cdot \|Y_0 - c_0\|_s \cdot \int_0^{\mathcal{T}' } |\psi(t)| dt \leq 1.$$

Alors $Y = Z + c_0$ est solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ sur $[0, \mathcal{T}'] \supseteq [0, \mathcal{T}_1]$.

Cas de données dans $W^{1,\infty}(\Omega)$

On introduit l'espace :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega) = L^\infty([0, \mathcal{T}], W^{1,\infty}(\Omega)).$$

On vérifie que le terme de produit $\nabla\phi \cdot \nabla Y$ garde un sens dans cet espace, grâce à la régularité (elliptique) de $\nabla\phi$, et du fait que si $g \in L^1(0, \mathcal{T})$, $t \mapsto \int_0^t g(\tau) d\tau$ est continue et dérivable presque partout, de dérivée g .

Propriétés

- ☛ **(principe du maximum)** Si Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ p.p., alors Y est à valeurs dans $[a, b]$ p.p. ;
- ☛ **(unicité)** Il existe au plus une solution dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$;
- ☛ **(symétrie)** Si Y_0 est paire dans un domaine symétrique, alors Y est paire.

Cas de données dans $W^{1,\infty}(\Omega)$

On introduit l'espace :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega) = L^\infty([0, \mathcal{T}], W^{1,\infty}(\Omega)).$$

On vérifie que le terme de produit $\nabla\phi \cdot \nabla Y$ garde un sens dans cet espace, grâce à la régularité (elliptique) de $\nabla\phi$, et du fait que si $g \in L^1(0, \mathcal{T})$, $t \mapsto \int_0^t g(\tau) d\tau$ est continue et dérivable presque partout, de dérivée g .

Propriétés

- 🦉 **(principe du maximum)** Si Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ p.p., alors Y est à valeurs dans $[a, b]$ p.p. ;
- 🦉 **(unicité)** Il existe au plus une solution dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$;
- 🦉 **(symétrie)** Si Y_0 est paire dans un domaine symétrique, alors Y est paire.

Cas de données dans $W^{1,\infty}(\Omega)$

On introduit l'espace :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega) = L^\infty([0, \mathcal{T}], W^{1,\infty}(\Omega)).$$

On vérifie que le terme de produit $\nabla\phi \cdot \nabla Y$ garde un sens dans cet espace, grâce à la régularité (elliptique) de $\nabla\phi$, et du fait que si $g \in L^1(0, \mathcal{T})$, $t \mapsto \int_0^t g(\tau) d\tau$ est continue et dérivable presque partout, de dérivée g .

Propriétés

- 🦉 **(principe du maximum)** Si Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ p.p., alors Y est à valeurs dans $[a, b]$ p.p. ;
- 🦉 **(unicité)** Il existe au plus une solution dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$;
- 🦉 **(symétrie)** Si Y_0 est paire dans un domaine symétrique, alors Y est paire.

Cas de données dans $W^{1,\infty}(\Omega)$

On introduit l'espace :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega) = L^\infty([0, \mathcal{T}], W^{1,\infty}(\Omega)).$$

On vérifie que le terme de produit $\nabla\phi \cdot \nabla Y$ garde un sens dans cet espace, grâce à la régularité (elliptique) de $\nabla\phi$, et du fait que si $g \in L^1(0, \mathcal{T})$, $t \mapsto \int_0^t g(\tau) d\tau$ est continue et dérivable presque partout, de dérivée g .

Propriétés

- **(principe du maximum)** Si Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ p.p., alors Y est à valeurs dans $[a, b]$ p.p. ;
- **(unicité)** Il existe au plus une solution dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$;
- **(symétrie)** Si Y_0 est paire dans un domaine symétrique, alors Y est paire.

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$.
Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$.

Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Pour $Y_0 \in H^s(\Omega)$, $s \geq s_0 + 1$, la solution est unique et vérifie le principe du maximum. La suite (μ_n) est alors décroissante et converge vers $|\Omega_1(t)|/|\Omega|$, pour $\Omega_1(t) = \{\mathbf{x} \in \Omega : Y(t, \mathbf{x}) = 1\}$.

Il en est de même pour $Y \in \mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(\Omega)$, sous réserve d'existence.

Qu'en est-il pour les données L^∞ ?

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$. Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Reformulation adaptée au concept de **solutions faibles** :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \cdot (Y \nabla \phi) = \psi(t) Y \left(Y - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, dx' \right), \\ Y(t=0, \cdot) = Y_0, \\ \Delta \phi(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left(Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, dx' \right), \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$. Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

En utilisant le **principe de renormalisation**, on prouve :

Lemme

Les termes de la suite (μ_n) vérifient les équations (au sens fort) :

$$\mu_n' = \psi(\mu_{n+1} - \mu_1 \mu_n).$$

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$. Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Théorème

Si Y est une solution faible de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ pour $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(\mathbf{x})]^n \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}, \quad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau.$$

Moyenne des solutions (preuve)

On écrit l'EDO $\mu'_n + \psi\mu_1\mu_n = \psi\mu_{n+1}$ sous la forme :

$$M_N(t) = \mu_N(0) + \int_0^t \psi(\tau)M_{N+1}(\tau) d\tau,$$

avec $M_N(t) := \mu_N(t) \exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\mu_1(\tau) d\tau\right)$.

Moyenne des solutions (preuve)

On écrit l'EDO $\mu'_n + \psi \mu_1 \mu_n = \psi \mu_{n+1}$ sous la forme :

$$M_N(t) = \mu_N(0) + \int_0^t \psi(\tau) M_{N+1}(\tau) d\tau,$$

avec $M_N(t) := \mu_N(t) \exp\left(\int_0^t \psi(\tau) \mu_1(\tau) d\tau\right)$. D'où, par récurrence :

$$M_1(t) = \sum_{k=1}^N \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^{k-1}}{(k-1)!} + \int_0^t \psi(\tau) M_{N+1}(\tau) \frac{[\Psi(t) - \Psi(\tau)]^{N-1}}{(N-1)!} d\tau.$$

Moyenne des solutions (preuve)

On écrit l'EDO $\mu'_n + \psi \mu_1 \mu_n = \psi \mu_{n+1}$ sous la forme :

$$M_N(t) = \mu_N(0) + \int_0^t \psi(\tau) M_{N+1}(\tau) d\tau,$$

avec $M_N(t) := \mu_N(t) \exp\left(\int_0^t \psi(\tau) \mu_1(\tau) d\tau\right)$. En passant à la limite, il vient :

$$M_1(t) := \mu_1(t) \exp\left(\int_0^t \psi(\tau) \mu_1(\tau) d\tau\right) = \sum_{k \geq 1} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

En multipliant par ψ et en intégrant, on obtient :

$$\exp\left(\int_0^t \psi(\tau) \mu_1(\tau) d\tau\right) = 1 + \sum_{k \geq 1} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^k}{k!}.$$

Moyenne des solutions (preuve)

En divisant les deux dernières égalités, il vient :

$$\mu_1(t) = \frac{\sum_{k \geq 1} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k \geq 0} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^k}{k!}} = \frac{\int_{\Omega} Y_0(\mathbf{x}) \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}},$$

qui est la formule pour $n = 1$. Pour $n = 2$, on dérive l'égalité obtenue pour M_1 :

$$M_1'(t) = \psi(t) M_2(t) = \psi(t) \sum_{k \geq 2} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^{k-2}}{(k-2)!}.$$

On poursuit par récurrence.

Moyenne des solutions (remarques)

Théorème

Si Y est une solution faible de $ABV[Y_0, \psi, \Omega]$ pour $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(\mathbf{x})]^n \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}, \quad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau.$$

- La fonction μ_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
- Si Ψ est périodique, alors μ_n l'est.
- On obtient une estimation L^2 de Y .

Moyenne des solutions (remarques)

Théorème

Si Y est une solution faible de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ pour $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(\mathbf{x})]^n \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}, \quad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau.$$

Lorsque Y est la fonction indicatrice du domaine $\Omega_1(t)$, alors :

$$\mu_1(t) = \mu_n(t) = \frac{|\Omega_1(t)|}{|\Omega|}$$

représente le **volume relatif de la bulle**. On note l'influence du domaine (effet elliptique). Ce résultat fournit un **test de précision** pour les simulations.

Moyenne des solutions (remarques)

Théorème

Si Y est une solution faible de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ pour $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(\mathbf{x})]^n \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}, \quad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau.$$

On peut alors récrire le système comme un modèle purement différentiel :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ Y(0, \cdot) = Y_0, \\ \Delta \phi - \psi(t) Y = -\psi(t) \mu_1(t), \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Principe du maximum faible

Théorème

Soit Y une solution faible de $ABV[Y_0, \psi, \Omega]$ avec $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$. On suppose que Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ presque partout. Alors il en est de même pour $Y(t, \cdot)$ pour presque tout t .

Principe du maximum faible (preuve)

Théorème

Soit Y une solution faible de $ABV[Y_0, \psi, \Omega]$ avec $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$. On suppose que Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ presque partout. Alors il en est de même pour $Y(t, \cdot)$ pour presque tout t .

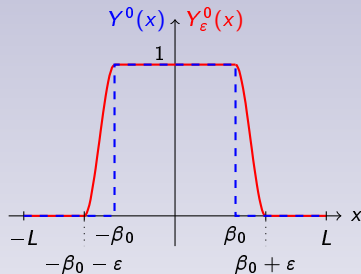
On suppose (quitte à mettre à l'échelle) que $[a, b] = [0, 1]$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\omega(t) \subset \Omega$ de **mesure non nulle** sur lequel $Y(t, \mathbf{x}) > 1$. Alors :

$$\mu_{2n}(t) = \underbrace{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega \setminus \omega(t)} Y^{2n}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\omega(t)} Y^{2n}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty}.$$

D'où la suite diverge, ce qui est contradictoire avec son expression ($Y_0 \in [0, 1]$).
D'où $Y(t, \mathbf{x}) \leq 1$.

Pour la positivité de Y , on raisonne sur la variable $Z = 1 - Y \leq 1$.

Perspectives



$$Y_\epsilon^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-L, -\beta_0 - \epsilon \cup]\beta_0 + \epsilon, L], \\ \Lambda \left(2 \frac{x + \beta_0}{\epsilon} + 1 \right) & \text{si } x \in [-\beta_0 - \epsilon, -\beta_0], \\ \Lambda \left(2 \frac{\beta_0 - x}{\epsilon} + 1 \right) & \text{si } x \in [\beta_0, \beta_0 + \epsilon], \\ 1 & \text{si } x \in]-\beta_0, \beta_0[. \end{cases}$$

Réécriture simplifiée

En dimension 1, le système s'écrit plus simplement :

$$\begin{cases} \partial_t Y + u \partial_x Y = 0, \\ Y(t=0, \cdot) = Y_0, \\ u(t, x) = \psi(t) \left(\int_{-L}^x Y(t, x') dx' - \frac{x+L}{2L} \int_{-L}^L Y(t, x') dx' \right), \end{cases}$$

soit encore :

$$\partial_t Y(t, x) + \psi(t) \left(\int_{-L}^x Y(t, y) dy - \frac{x+L}{2L} \int_{-L}^L Y(t, y) dy \right) \partial_x Y(t, x) = 0.$$

En posant $R(t, x) = \int_{-L}^x (Y(t, x') - \mu_1(t)) dx'$, l'équation intégrro-différentielle se reformule en une EDO :

$$\partial_{tx}^2 R(t, x) + \psi(t) R(t, x) \partial_{xx}^2 R = -\mu_1'(t), \quad R(t, L) = R(t, -L) = 0.$$

Méthode des caractéristiques

Pour $Y_\varepsilon^0 \in H^2(-L, L)$, on introduit le problème :

$$\frac{d\mathcal{X}_\varepsilon}{dt} = u_\varepsilon(t, \mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0)), \quad \mathcal{X}_\varepsilon(0; x_0) = x_0.$$

$t \mapsto \mathcal{X}_\varepsilon(t, \cdot)$ établit un difféomorphisme de $(-L, L)$ dans lui-même et est donc inversible (pour $t \in [0, \mathcal{T}_\varepsilon]$).

La solution vérifie donc :

$$Y_\varepsilon(t, x) = Y_\varepsilon^0(\mathcal{X}_\varepsilon^{-1}(t; x)).$$

Cette formule permet de justifier que Y_ε conserve le même profil que Y_ε^0 , à savoir :

- $Y_\varepsilon(t, x) = 1$ pour $x \in [-\beta_\varepsilon(t), \beta_\varepsilon(t)]$;
- $Y_\varepsilon(t, x) = 0$ pour $x \notin [-\delta_\varepsilon(t), \delta_\varepsilon(t)]$;

Méthode des caractéristiques

Pour $Y_\varepsilon^0 \in H^2(-L, L)$, on introduit le problème :

$$\frac{d\mathcal{X}_\varepsilon}{dt} = u_\varepsilon(t, \mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0)), \quad \mathcal{X}_\varepsilon(0; x_0) = x_0.$$

$t \mapsto \mathcal{X}_\varepsilon(t, \cdot)$ établit un difféomorphisme de $(-L, L)$ dans lui-même et est donc inversible (pour $t \in [0, \mathcal{I}_\varepsilon]$).

La solution vérifie donc :

$$Y_\varepsilon(t, x) = Y_\varepsilon^0(\mathcal{X}_\varepsilon^{-1}(t; x)).$$

On prouve formellement qu'il existe $\beta(t)$ tel que $\beta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \beta$ et $\delta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \beta$.

Problème : \mathcal{I}_ε (prescrit par le théorème d'existence en temps fini) **tend vers 0** lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$!

On prouve en fait que le temps d'existence de la solution est infini.

Méthode des caractéristiques

$$\begin{aligned}
 \partial_{x_0} \mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0) &= \exp \left[\int_0^t \partial_x u_\varepsilon(\tau, \mathcal{X}_\varepsilon(\tau; x_0)) d\tau \right], \\
 &= \exp \left[\int_0^t \psi(\tau) [Y_\varepsilon(\tau, \mathcal{X}_\varepsilon(\tau; x_0)) - \mu_\varepsilon(\tau)] d\tau \right], \\
 &= e^{\Psi(t) Y_\varepsilon^0(x_0)} \exp \left[- \int_0^t \psi(\tau) \mu_\varepsilon(\tau) d\tau \right] = \frac{2L \exp [\Psi(t) Y_\varepsilon^0(x_0)]}{\int_{-L}^L \exp [\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y)] dy}.
 \end{aligned}$$

On intègre alors cette dernière égalité par rapport à x_0 , ce qui donne :

$$\mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0) = 2L \frac{\int_{-L}^{x_0} \exp [\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y)] dy}{\int_{-L}^L \exp [\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y)] dy} - L.$$

Méthode des caractéristiques

Théorème

Soient $Y_0 \in L^\infty(-L, L)$ et ψ continue. Alors une solution faible globale en temps de $ABV[Y_0, \psi, \Omega]$ est donnée par $\mathcal{Y}(t, x) = Y_0(\Theta_t^{-1}(x))$, où Θ_t^{-1} est la réciproque (par rapport à x_0) de la fonction :

$$\Theta(t, x_0) = 2L \frac{\int_{-L}^{x_0} \exp \Psi(t) Y^0(y) dy}{\int_{-L}^L \exp \Psi(t) Y^0(y) dy} - L.$$

Idées de base dans la preuve

- Changement de variables lipschitzien [Evans et Gariepy, **CRC-Press**, 1992].
- Validité de l'équation caractéristique $\partial_t \Theta = \mathcal{U}(t, \Theta)$.
- Calcul de la quantité : $\mathcal{A}(\mathcal{Y}) := \iint \mathcal{Y}[\partial_t \varphi + \mathcal{U} \partial_x \varphi](t, x) dt dx$.

Analyse des résultats en dimension 1

- Expression de l'unique solution pour $Y_0 \in H^2(-L, L)$, **globale en temps**.
- Existence de **solutions faibles globales en temps**.
- Pour $Y_0 = \mathbf{1}_{[-\beta_0, \beta_0]}$, il existe une solution de la forme $\mathbf{1}_{[-\beta(t), \beta(t)]}$, ce qui légitime l'étude de ce système dans le cadre de la **modélisation des bulles**. Cette solution est explicite et peut être obtenue grâce aux relations de *Rankine et Hugoniot*.
- La méthode s'adapte au **cas radial** (en dimensions 2 et 3) et fournit également des solutions explicites.

Schémas MOC

Objectifs

- Simuler les **solutions régulières** de l'équation $\partial_t Y + \mathbf{U} \cdot \nabla Y = f$;
- Atteindre **l'ordre 2** en espace-temps.

Idée

La méthode des caractéristiques fournit l'égalité :

$$Y(t, \mathbf{x}) = Y(t - \Delta t, \mathcal{X}(t - \Delta t; t, \mathbf{x})) + \int_{t - \Delta t}^t f(\sigma, \mathcal{X}(\sigma; t, \mathbf{x})) d\sigma,$$

pour \mathcal{X} solution de :

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = \mathbf{U}(t, \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x})), \quad \mathcal{X}(s; s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Schémas MOC

On se donne un maillage x_i en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$

Deux étapes

- Calcul du **ped de la caractéristique** ξ_i^n (montée à l'ordre 2 par un développement limité de \mathcal{X} autour de (t^n, x_i))
- **Approximation de** $Y(t^n, \xi_i^n)$, ne connaissant que les valeurs de la solution aux nœuds du maillage (montée à l'ordre par une interpolation ... d'ordre 2)

Choix

Garantir le **principe du maximum**.

Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Order 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \Delta t \partial_s \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{ss}^2 \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Order 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^{n+1}; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \Delta t \partial_s \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{ss}^2 \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd-ordre

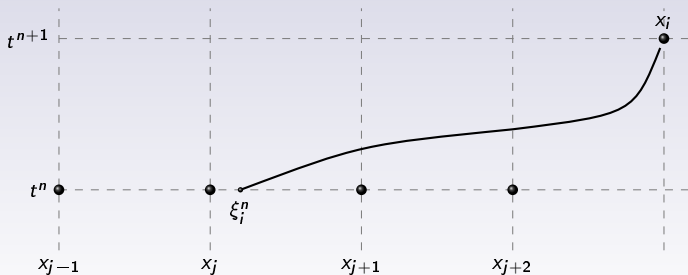


Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Order 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \Delta t \partial_s \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{ss}^2 \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd ordre

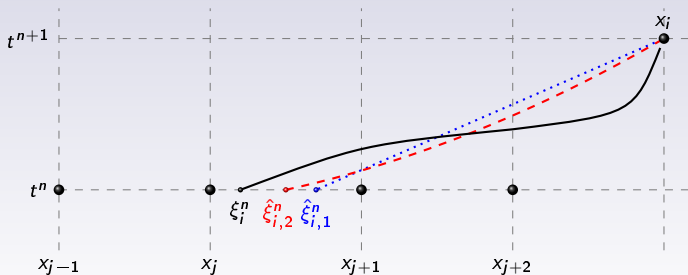


Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Order 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^{n+1}; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \Delta t \partial_s \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{ss}^2 \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd ordre

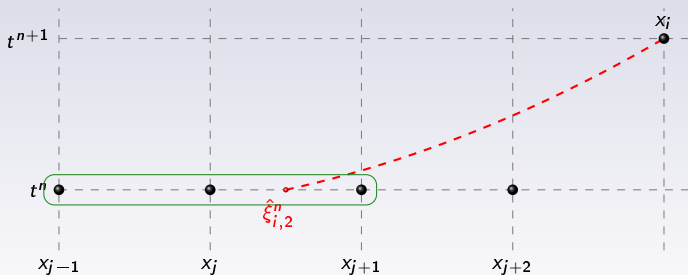


Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Order 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^{n+1}; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \Delta t \partial_s \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{ss}^2 \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd ordre

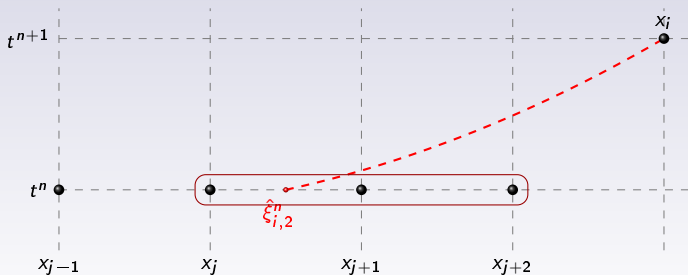


Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Order 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \Delta t \partial_s \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{ss}^2 \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd ordre

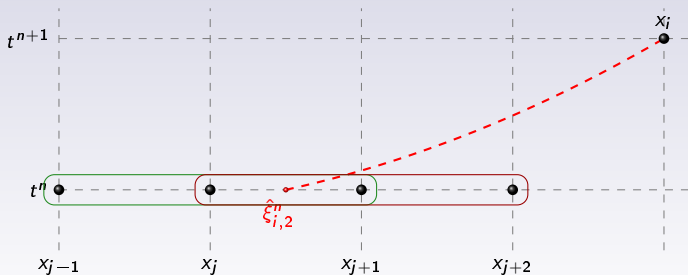


Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Order 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \Delta t \partial_s \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{ss}^2 \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd-ordre

Schéma :

$$\theta = \frac{x_{j+1} - \xi_i^n}{\Delta x}$$

$$Y_i^{n+1} = \alpha_{ij}^n \left[-\frac{\theta(1-\theta)}{2} Y_{j-1}^n + \theta(2-\theta) Y_j^n + \frac{(1-\theta)(2-\theta)}{2} Y_{j+1}^n \right] \\ + (1 - \alpha_{ij}^n) \left[\frac{\theta(1+\theta)}{2} Y_j^n + (1-\theta^2) Y_{j+1}^n - \frac{\theta(1-\theta)}{2} Y_{j+2}^n \right]$$

Analyse du schéma

Stabilité inconditionnelle (au sens de *Von Neumann*)

Consistance inconditionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) := & \frac{1}{\Delta t} \left[Y(t^{n+1}, x_i) - \frac{\theta^2}{2} [Y(t^n, x_{j-1}) - 2Y(t^n, x_j) + Y(t^n, x_{j+1})] \right. \\ & \left. + \frac{\theta}{2} [Y(t^n, x_{j-1}) - 4Y(t^n, x_j) + 3Y(t^n, x_{j+1})] - Y(t^n, x_{j+1}) \right]. \end{aligned}$$

Pour $\Delta t = \Delta x^\alpha$, on a :

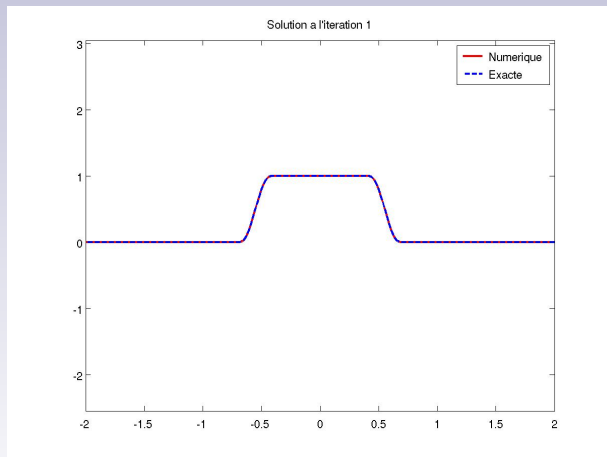
$$\bullet \mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta t^{1/\alpha}) = \mathcal{O}(\Delta t^2), \alpha \leq 1;$$

$$\bullet \mathcal{E}_i^n(\Delta x^\alpha, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta x^2), \alpha > 1.$$

Dans le cas général :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{E}(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{E}(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$

$$N_t = 100, N_x = 450$$

Simulations du modèle ABV

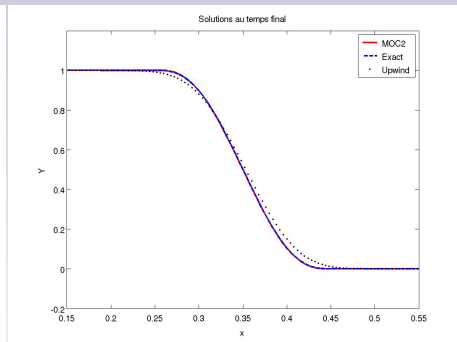
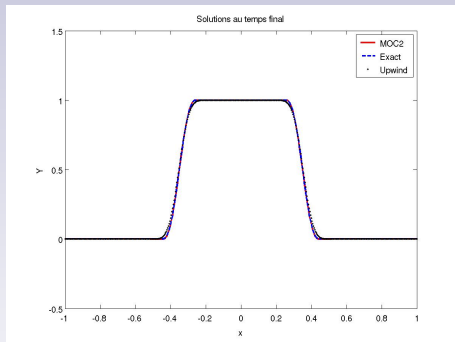
Données

- $\Omega = [-1, 1]$
- $\psi(t) = 2 \cos(30t)$
- Régularisations polynomiales de degrés 5, 1 et 0
- 200 itérations, 500 points en espace

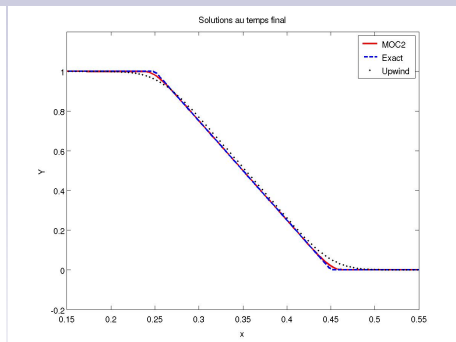
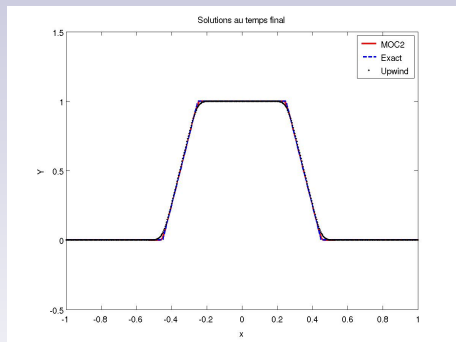
Approximation de la vitesse

$$U_i^n = \psi(t^n) \Delta x \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{Y_j^n + Y_{j+1}^n}{2} - \frac{x_i + 1}{2} \sum_{j=1}^{N_x-1} \frac{Y_j^n + Y_{j+1}^n}{2} \right].$$

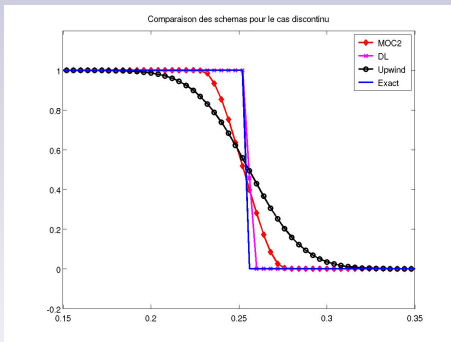
Simulations du modèle ABV (P_5)



Simulations du modèle ABV (P_1)



Simulations du modèle ABV (P_0)

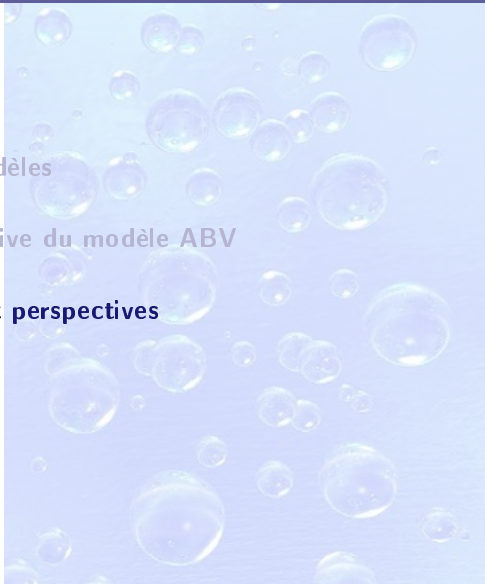


Simulations en dimension 2 (donnée irrégulière)

Simulations en dimension 2 (donnée irrégulière)

Plan de la partie

- 1 Différents modèles
- 2 Étude qualitative du modèle ABV
- 3 Conclusions et perspectives**



Bilan

🐞 Résultats

- ➡ **Existence et unicité** de solutions classiques en temps fini
- ➡ Solutions (faibles et classiques) **globales en temps** en dimension 1, et en dimensions 2 / 3 (symétrie radiale)
- ➡ **Formules explicites** de solutions particulières et de la moyenne des solutions
- ➡ Construction d'un **schéma** en dimension 1 pour les solutions classiques, **inconditionnellement stable et consistant d'ordre 2**

🐞 Perspectives

- ➡ Traitement des données L^∞ (**solutions faibles**) en dimension quelconque
- ➡ Justification de l'**existence globale**
- ➡ Extension du schéma à la **dimension 2** et aux maillages cartésiens **non uniformes**

Bilan

📌 Résultats

- ➡ **Existence et unicité** de solutions classiques en temps fini
- ➡ Solutions (faibles et classiques) **globales en temps** en dimension 1, et en dimensions 2 / 3 (symétrie radiale)
- ➡ **Formules explicites** de solutions particulières et de la moyenne des solutions
- ➡ Construction d'un **schéma** en dimension 1 pour les solutions classiques, **inconditionnellement stable et consistant d'ordre 2**

📌 Perspectives

- ➡ Traitement des données L^∞ (**solutions faibles**) en dimension quelconque
- ➡ Justification de l'**existence globale**
- ➡ Extension du schéma à la **dimension 2** et aux maillages cartésiens **non uniformes**

A large, clear glass sphere is centered in the frame. Inside the sphere, a miniature, inverted landscape is visible, showing a dense forest of green trees and a body of water. The sphere is set against a soft, light green background. The text "MERCI DE VOTRE ATTENTION" is written across the center of the sphere in a black, serif font.

MERCI DE VOTRE ATTENTION